



Tours d'Igusa surconvergentes et familles p-adiques de formes de Siegel surconvergentes

Olivier Brinon, Abdellah Mokrane, Jacques Tilouine

► To cite this version:

Olivier Brinon, Abdellah Mokrane, Jacques Tilouine. Tours d'Igusa surconvergentes et familles p-adiques de formes de Siegel surconvergentes. 2015. hal-01108470

HAL Id: hal-01108470

<https://hal.science/hal-01108470>

Preprint submitted on 23 Jan 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Tours d'Igusa surconvergentes et familles p -adiques de formes de Siegel surconvergentes

Olivier Brinon, Abdellah Mokrane and Jacques Tilouine

1. Introduction

Soient $g > 1$ et p un nombre premier rationnel. La variété de Hecke $\mathfrak{X}_{\text{Betti}}$ associée à GSp_{2g} et p a déjà été construite par E. Urban (voir [Urb11] qui traite de cas beaucoup plus généraux) à l'aide de complexes calculant la cohomologie de Betti totale de certains faisceaux sur les variétés de Siegel de niveau premier à p . Plus récemment, Andreatta-Iovita-Pilloni [AIP] ont reconstruit la « partie de type holomorphe » \mathfrak{X}_{h} de la variété construite par E. Urban, en utilisant la partie holomorphe de la cohomologie de de Rham des variétés de Siegel de niveau premier à p ; ce travail a été complété dans une prépublication par Pilloni-Stroh [PS] dans laquelle ces auteurs, sous certaines hypothèses faibles, établissent la classicité des points de poids cohomologique et de pente petite par rapport au poids. Dans ce travail, on propose une nouvelle construction de la variété de Hecke holomorphe \mathfrak{X}_{h} en utilisant une variante surconvergente des formes p -adiques de Katz.

Soient T le tore diagonal de Sp_{2g} et $T_0 = \text{T}(\mathbf{Z}_p)$ le groupe de ses \mathbf{Z}_p -points. L'espace des poids $\mathfrak{W} = \text{Hom}(T_0, \mathbf{G}_m^{\text{rig}})$ est le \mathbf{Q}_p -espace rigide des caractères continus de T_0 . C'est une réunion finie de copies du polydisque unité ouvert de dimension g . Pour construire la variété de Hecke \mathfrak{X}_{h} au-dessus de \mathfrak{W} en suivant la technique de Coleman, formalisée par Buzzard [Buz07] et Chenevier [Che04], il suffit de construire, pour chaque ouvert affinoïde $\mathfrak{U} = \text{Spm } A(\mathfrak{U})$, d'un recouvrement admissible affinoïde $\{\mathfrak{U}\}$ de \mathfrak{W} , des $A(\mathfrak{U})$ -modules de Banach « projectifs » et des opérateurs complètement continus $U_p \in \mathcal{U}_p^-$ sur ces modules satisfaisant certaines conditions de compatibilité et où \mathcal{U}_p^- désigne la sous-algèbre contractante de l'algèbre de Hecke Iwahorique (cf section 10.2).

Dans [AIP], les auteurs définissent, pour un certain recouvrement admissible $\{\mathfrak{U}_n\}$ de \mathfrak{W} , des $A(\mathfrak{U}_n)$ -modules $S_{\kappa_{\mathfrak{U}_n}, v_n, w_n}^{\text{AIP}}$ où $v_n \rightarrow 0$ et $w_n \rightarrow \infty$ sont deux paramètres rationnels liés par les relations $0 < v_n < \frac{1}{2p^{n-1}}$ et $n - 1 + \frac{v_n}{p-1} < w_n < n - v_n \cdot \frac{p^n - 1}{p-1}$ et $\kappa_{\mathfrak{U}_n}$ désigne le poids universel sur $\{\mathfrak{U}_n\}$ donné par $\kappa_{\mathfrak{U}_n} : T_0 \rightarrow A(\mathfrak{U}_n)^\times$, $t_0 \mapsto (\kappa \mapsto \kappa(t_0))$. Ils sont définis à l'aide des groupes canoniques supérieurs H_n de Fargues et Tian [FT10], qui existent sur les voisinages stricts $\overline{X}^{\text{rig}}(v_n)$ du lieu ordinaire dans une compactification toroïdale fixée \overline{X} de la variété de Siegel X . Les auteurs définissent des faisceaux de différentielles $\omega_{v_n, w_n}^{\kappa_{\mathfrak{U}_n}}$ sur $\overline{X}^{\text{rig}}(v_n) \times \mathfrak{U}_n$ en termes des applications de Hodge-Tate associées aux groupes canoniques H_n . Ils posent alors $S_{\kappa_{\mathfrak{U}_n}, v_n, w_n}^{\text{AIP}} = \text{H}^0(\overline{X}^{\text{rig}}(v_n) \times \mathfrak{U}_n, \omega_{v_n, w_n}^{\kappa_{\mathfrak{U}_n}})$.

Considérons l'algèbre de Hecke abstraite $\mathcal{H}^{Np} \otimes \mathcal{U}_p^-$, où \mathcal{H}^{Np} désigne la \mathbf{Q}_p -algèbre de Hecke

sphérique hors de Np . Cette algèbre opère sur les espaces $S_{\kappa_{\mathfrak{U}_n}, v_n, w_n}^{\text{AIP}}$, de façon compatible quand n varie. À l'aide de ces représentations, ces auteurs peuvent définir par recollements la variété de Hecke \mathfrak{X}_h comme un espace rigide muni d'un morphisme rigide $\kappa: \mathfrak{X}_h \rightarrow \mathfrak{W}$, appelé « poids », qui est localement fini et dominant (sa surjectivité est une question ouverte). Elle est munie du système de valeurs propres de Hecke universel $\theta: \mathcal{H}^{Np} \otimes \mathcal{U}_p^- \rightarrow \mathcal{O}_{\mathfrak{X}_h}$. Le triplet $(\mathfrak{X}_h, \kappa, \theta)$ est caractérisé par les deux conditions suivantes :

- (1) toute forme cuspidale holomorphe de poids $k = (k_1, \dots, k_g)$, $k_1 \geq \dots \geq k_g$, de niveau N hors de p et de niveau iwahorique en p , propre pour $\mathcal{H}^{Np} \otimes \mathcal{U}_p^-$, définit un point $x \in \mathfrak{X}_h$, tel que $x \circ \theta = \theta_f$ soit le système de valeurs propres associé à f ;
- (2) ces points forment un sous-ensemble dense et d'accumulation de \mathfrak{X}_h .

On montre de plus les deux propriétés suivantes :

- (3) tout point de \mathfrak{X}_h définit une forme de Siegel surconvergente propre de pente finie pour \mathcal{U}_p^- ;
- (4) pour toute forme classique f de poids k de pente non-critique (voir 11), il existe un voisinage affinoïde \mathfrak{U} de k dans \mathfrak{W} tel que pour tout $k' \in \mathfrak{U}$ dominant cohomologique (*i.e.* tel que $k'_1 \geq \dots \geq k'_g \geq g+1$), tout point $x' \in \kappa^{-1}(k')$ non-critique pour θ_f est classique.

En adaptant la définition des formes p -adiques de Katz, nous construisons également dans cet article de tels modules munis d'opérateurs U_p complètement continus. Cette approche utilise la notion de tour d'Igusa surconvergente (dûe à deux des auteurs [BM10], pour l'instant sous l'hypothèse $p > 3$) sur les voisinages $X^{\text{rig}}(v)$ du lieu ordinaire¹. Pour chaque v élément de $]0, \frac{v_{\text{BM}}}{p}[$ (voir 6.1.3), ces auteurs construisent un $\text{GL}_g(\mathbf{Z}_p)$ -torseur étale $T_{\infty, v} \rightarrow X^{\text{rig}}(v)$ prolongeant la tour d'Igusa classique (pour la variété compactifiée, voir Appendice). On introduit alors les sous-faisceaux de la complétion p -adique du faisceau des fonctions sur $T_{\infty, v}$, des sections sur lesquelles l'action de $\text{GL}_g(\mathbf{Z}_p)$ se prolonge à un de ses voisinages analytiques quasi-compacts dans la variété $(\text{GL}_g)^{\text{an}}$. C'est à l'aide de l'anneau des sections globales de ce faisceau qu'on définit nos modules de Banach de formes « Igusa-surconvergentes ».

Comme la tour d'Igusa $T_{\infty, v}$ est « uniforme » au-dessus de $X^{\text{rig}}(v)$, nos modules de Banach ne nécessitent pas pour leur définition de relations entre v (élément de $]0, \frac{v_{\text{BM}}}{p}[$) et le couple (w, \mathfrak{U}) , où \mathfrak{U} est un affinoïde de \mathfrak{W} (il y a cependant une relation entre w et \mathfrak{U}). L'opérateur complètement continu est celui défini dans [Hid02], [Pil12], [AIP]. Nous construisons alors des morphismes naturels de périodes appelés morphismes de Hodge-Tate-Igusa entre les différents toiseurs définissant les formes Igusa-surconvergentes d'une part, et les formes classiques et celles de Andreatta-Iovita-Pilloni d'autre part. Ceci nous permet de comparer les formes de Siegel-Igusa, définies dans 7.4, avec les formes de Siegel classiques (voir 8.1.3) et les formes de Siegel-AIP, du moins en poids accessibles (voir 8.2). Nous montrons en particulier que les familles de formes de Siegel-Igusa et celles de Siegel-AIP coïncident sur l'ouvert affinoïde des poids accessibles, qui contient tous les poids classiques (voir 8.2.6).

D'autre part, nous montrons directement (Section 9) que nos modules de Banach de formes de Siegel-Igusa surconvergentes sont orthonormalisables et interpolent les espaces de formes surconvergentes.

Notre technique de construction semble bien adaptée à des généralisations à des variétés de Shimura de type abélien mais non nécessairement de type PEL, comme par exemple les

1. Dans la section 9, on étend cette construction aux voisinages analogues $\bar{X}^{\text{rig}}(v)$ dans une compactification toroïdale \bar{X} de la variété de Siegel X .

variétés de Shimura pour $\mathrm{SO}(n, 2)$.

Table des matières

1	Introduction	1
2	Notations et définitions	4
3	Compactification toroidale et principe de Koecher	5
4	Cristaux unités et correspondance de Katz	6
4.1	Correspondance de Katz dans le cas affine	6
4.2	Correspondance de Katz faisceautique	7
4.3	Correspondance de Katz et application de Hodge-Tate	9
5	Tour d'Igusa ordinaire	10
5.1	Déviissage connexe-étale	10
5.2	Tour d'Igusa	10
5.3	Tour d'Igusa et variétés de Siegel de niveau parahorique	11
6	Le faisceau lisse surconvergent et l'application de Hodge-Tate	12
6.1	Représentation de monodromie et faisceaux localement constants surconvergents	12
6.2	Anneaux de périodes	13
6.3	Le cristal presque unité	13
6.4	La représentation de Galois surconvergente et les faisceaux \mathbb{L}_m . . .	15
6.5	L'application de Hodge-Tate surconvergente locale	16
6.6	L'application de Hodge-Tate surconvergente faisceautique	16
6.7	Tour d'Igusa surconvergente et variétés de Siegel	20
7	Modules des formes Igusa-surconvergentes	22
7.1	Faisceau des formes de Siegel classiques	22
7.2	Faisceaux des formes Igusa-surconvergentes	23
7.3	Compactification toroïdale et q -développement	26
7.4	Modules sur l'espace des poids	28
8	Relation avec d'autres formes modulaires	31
8.1	Relation avec les formes modulaires classiques	31
8.2	Relation avec les formes surconvergentes de poids accessibles	32
9	Image directe et théorème de contrôle	36
9.1	Tour d'Igusa surconvergente compactifiée	36
9.2	Formes surconvergentes entières et réduction modulo p^m	40
9.3	Restriction de Π_I^f aux strates du bord	42
9.4	Cartes locales en niveau p^s pour $1 \leq s \leq \infty$	44
9.5	Démonstration du théorème de changement de base	48
9.6	Démonstration du théorème d'acyclicité	49
9.7	Projectivité et contrôle	50
10	Opérateurs de Hecke	53
10.1	Opérateurs de Hecke hors de Np	53
10.2	L'opérateur U_p et sa théorie spectrale	54
10.3	Contrôle et classicité	57
11	Variétés de Hecke	57
Annexe A.	Le morphisme des périodes	58
A.1	Le morphisme des périodes en caractéristique p	58
A.2	Le morphisme des périodes en caractéristique 0	62

A.3 Application aux F -cristaux surconvergents de Hodge	63
Annexe B. Sous-groupe canonique et application de Hodge-Tate	65
B.1 Comparaison au sous-groupe canonique	65
B.2 Comparaison des applications de Hodge-Tate d'échelon 1	68
Annexe C. Module de Dieudonné d'une variété semiabélienne	70
C.1 Log-cristal de la variété de Kuga-Sato	70
C.2 Cartes locales de la variété de Kuga-Sato	71
C.3 Dévissage du log-cristal de la variété de Kuga-Sato sur une carte locale	71
Références	74

2. Notations et définitions

Soit $g \in \mathbf{N}_{>0}$; soit s la matrice $g \times g$ antidiagonale telle que $s_{i,g-i+1} = 1$ pour $i = 1, \dots, g$; on considère le groupe des similitudes symplectiques $\mathbf{GSp}_{2g} = \{X \in \mathbf{GL}_{2g}; {}^tXJX = \nu \cdot J\}$ où J est la matrice antisymétrique non-dégénérée donnée par blocs $g \times g$ par $J = \begin{pmatrix} 0 & s \\ -s & 0 \end{pmatrix}$. Le noyau du caractère ν de \mathbf{GSp}_{2g} est le groupe symplectique \mathbf{Sp}_{2g} .

Pour tout $r = 0, \dots, g$, on note \mathbf{I}_r , resp. s_r la matrice unité, resp. antidiagonale unité, de taille r . Soit P_r le parabolique maximal standard de \mathbf{Sp}_{2g} , triangulaire supérieur par blocs, dont le sous-groupe de Levi standard M_r est constitué des matrices diagonales par blocs $\text{diag}(A, B, s_{g-r}^t A^{-1} s_{g-r})$, où $B \in \mathbf{Sp}_{2r}$ et $A \in \mathbf{GL}_{g-r}$; on note $M_r = M_{r,\ell} \times M_{r,h}$ la décomposition en partie linéaire et hermitienne de M_r , où le sous-groupe $M_{r,\ell}$, resp. $M_{r,h}$, est l'ensemble des matrices $m_r(A) = \text{diag}(A, \mathbf{I}_{2r}, s_{g-r}^t A^{-1} s_{g-r})$, $A \in \mathbf{GL}_{g-r}$, resp. $\text{diag}(\mathbf{I}_{g-r}, B, \mathbf{I}_{g-r})$, $B \in \mathbf{Sp}_{2r}$; on note W_{P_r} , resp. U_{P_r} , le radical unipotent de P_r , resp. le centre de W_{P_r} . On a

$$U_{P_r} = \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{g-r} & m & u \\ & \mathbf{I}_{2r} & {}^t n \\ & & \mathbf{I}_{g-r} \end{pmatrix} ; m, n \in M_{g-r, 2r}, u \in M_{g-r}, \right. \\ \left. s_{g-r} m = n J_{2r} \text{ et } s_{g-r} u - {}^t u s_{g-r} = {}^t n J n \right\}$$

et

$$U'_{P_r} = \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{g-r} & 0 & u \\ & \mathbf{I}_{2r} & 0 \\ & & \mathbf{I}_{g-r} \end{pmatrix} ; u \in M_{g-r}, s_{g-r} u = {}^t u s_{g-r} \right\}$$

Tout parabolique maximal propre défini sur \mathbf{Q} est conjugué sur \mathbf{Q} à l'un des P_r . On note $\mathbf{\Pi}_r$ l'ensemble des paraboliques rationnels conjugués à P_r et $\mathbf{\Pi} = \mathbf{\Pi}_0 \sqcup \dots \sqcup \mathbf{\Pi}_{g-1}$ l'ensemble de tous les sous-groupes paraboliques maximaux propres \mathbf{Q} -rationnels de \mathbf{Sp}_{2g} .

On appelle P_0 le parabolique de Siegel de \mathbf{Sp}_{2g} ; on note $m : A \mapsto m(A) = \text{diag}(A, s^t A^{-1} s)$ l'isomorphisme de \mathbf{GL}_g avec M_0 . Soit $B^+ = TN^+$ le sous-groupe triangulaire supérieur de \mathbf{GL}_g , où T , resp. N^+ , désigne son tore diagonal maximal, resp. son radical unipotent. On identifiera T et son image dans M par $t \mapsto m(t)$. Le sous-groupe triangulaire supérieur $B_{\mathbf{Sp}}$ de \mathbf{Sp}_{2g} peut se décomposer en produit semi-direct $B_{\mathbf{Sp}} = m(B^+) \cdot U_0$; on écrira simplement $B_{\mathbf{Sp}} = B^+ \cdot U_0$.

Soit $N \geq 3$; soit $\Gamma \subset \mathbf{Sp}_{2g}(\mathbf{Z})$ un sous-groupe de niveau N sans torsion. Il agit proprement et librement sur le demi-espace de Siegel \mathcal{H}_g . Le quotient $\Gamma \backslash \mathcal{H}_g$ admet un modèle quasi-projectif X lisse sur $\mathbf{Z}[\zeta_N, \frac{1}{N}]$ qui est géométriquement connexe. Soit $f : A \rightarrow X$ la variété

abélienne universelle principalement polarisée de dimension g sur X .

Soient $p > 2$ un nombre premier qui ne divise pas N , $\mathfrak{p}|p$ un idéal premier de $\mathbf{Z}[\zeta_N]$ et $W = \mathbf{Z}[\zeta_N]_{\mathfrak{p}}$ la complétion correspondante et $K = \text{Frac}(W)$ le corps des fractions de W . On note X^f le schéma formel associé à X/W par complétion p -adique le long de la fibre spéciale, et soit X^{rig} le K -espace rigide associé à X^f par la construction de Raynaud. On note $X^f(0)$ l'ouvert formel de X^f et $X^{\text{rig}}(0)$ l'espace rigide associé.

3. Compactificaton toroidale et principe de Koecher

On utilise les notations et résultats de [FC90, Chap.IV] et [Che04]. Pour chaque $P \in \mathbf{\Pi}$, on fixe une décomposition de Levi $P = M_P U_P$ et une décomposition $M_P = M_{P,h} \times M_{P,\ell}$ en partie hermitienne et partie linéaire. Nous associons à notre groupe de congruences Γ la famille de groupes de congruences $\Gamma_{P,\ell} \subset M_{P,\ell}(\mathbf{R})$ obtenus par projection dans $M_{P,\ell}(\mathbf{R})$ de $\Gamma \cap P / \Gamma \cap U_P$. On fixe une famille $\Sigma = (\Sigma_P)_P$ de décompositions $\Gamma_{P,\ell}$ -admissibles Σ_P en cônes polyédraux rationnels du cône C_P des matrices semi-définies à noyau rationnel dans le centre $U'_P(\mathbf{R})$ de $U_P(\mathbf{R})$; notons \bar{X} la compactification toroïdale arithmétique sur $\mathbf{Z}[\frac{1}{N}, \zeta_N]$ associée à Σ . Soit $D = \bar{X} - X$ le diviseur à croisements normaux relatif associé à Σ . Soit $f: \mathcal{G} \rightarrow \bar{X}$ le schéma semi-abélien associé à Σ ; soit $e: \bar{X} \rightarrow \mathcal{G}$ la section unité. Le faisceau ω se prolonge en un faisceau localement libre sur \bar{X} , encore noté ω défini par $e^* \Omega_{\mathcal{G}/\bar{X}}$. Soit $\bar{\mathcal{T}} = \text{Isom}_{\bar{X}}(\mathcal{O}_{\bar{X}}^g, \omega)$ le GL_g -torseur sur \bar{X} des bases de ω . Soit $\bar{\pi}: \bar{\mathcal{T}} \rightarrow \bar{X}$ le morphisme de projection; pour tout poids $k \in X^*(T)$ de GL_g , conformément aux notations de la section 7.1, on pose $\omega^k = (\bar{\pi}_* \mathcal{O}_{\bar{\mathcal{T}}})^{N^-}[-k]$ et $\omega_k = (\bar{\pi}_* \mathcal{O}_{\bar{\mathcal{T}}}) (-D)^{N^-}[-k]$. Rappelons que si k n'est pas dominant, ces faisceaux sont nuls. On a encore

$$(\bar{\pi}_* \mathcal{O}_{\bar{\mathcal{T}}})^{N^-} = \bigoplus_{k \in X^*(T)^+} \omega^k \quad \text{et} \quad (\bar{\pi}_* \mathcal{O}_{\bar{\mathcal{T}}}) (-D)^{N^-} = \bigoplus_{k \in X^*(T)^+} \omega_k$$

Le faisceau ω^k est le prolongement canonique du faisceau ω défini dans la section 7.1 et ω_k est le sous-faisceau des formes cuspidales.

On note encore \bar{X} le changement de base de \bar{X} à W . On note \bar{X}^f le W -schéma formel complétion de \bar{X} le long de la fibre spéciale, et \bar{X}^{rig} le K -espace rigide associé. Pour tout $k \in X^*(T)^+$, et pour toute extension p -adiquement complète L de K , on définit le L -espace des formes de Siegel cuspidales de poids k comme

$$S^k(\Gamma, L) = H^0(\bar{X}_L, \omega_k) = H^0(\bar{X}_L^{\text{rig}}, \omega_k) \quad (\text{C})$$

La seconde égalité est vraie par le principe GAGA rigide. Cette définition ne dépend pas du choix de Σ (ceci résulte par exemple de l'équivalence de cette définition avec celle donnée en termes du q -développement ci-dessous, ou voir [FC90, Chap.V]).

On peut remplacer X par $X_B(p)$ et ainsi définir l'espace des formes cuspidales pour $\Gamma_B(p)$:

$$S^k(\Gamma_B(p), L) = H^0(\bar{X}_B(p)_L, \omega_k) = H^0(\bar{X}_B(p)_L^{\text{rig}}, \omega_k) \quad (\text{CI})$$

Pour formuler le principe de Koecher v -surconvergent pour X , on rappelle d'abord les principes de Koecher formels et rigides. Le principe de Koecher arithmétique [FC90, V.4.8] montre que pour tout poids dominant $k \in X^*(T)^+$ et pour tout $m \geq 1$, la flèche de restriction fournit un isomorphisme

$$H^0(\bar{X} \otimes \mathbf{Z}/p^m \mathbf{Z}, \omega^k) \cong H^0(X \otimes \mathbf{Z}/p^m \mathbf{Z}, \omega^k)$$

ces isomorphismes sont compatibles quand m grandit et fournissent par limite projective un isomorphisme de W -modules

$$H^0(\bar{X}^f, \omega^k) \cong H^0(X^f, \omega^k) \quad (\text{KF})$$

appelé principe de Koecher formel. De plus, par extension des scalaires à K , le principe de Koecher formel fournit un isomorphisme de K -espaces vectoriels

$$H^0(\bar{X}^{\text{rig}}, \omega^k) \cong H^0(X^{\text{rig}}, \omega^k) \quad (\text{KR})$$

qu'on appelle principe de Koecher rigide.

Par ailleurs, l'invariant de Hodge se prolonge naturellement à \bar{X}^{rig} [AM04, Sect.8.2] : pour $x \in \bar{X}^{\text{rig}}(L) = \bar{X}^f(\mathcal{O}_L)$, $\text{Hdg}(x)$ est défini comme l'invariant de Hodge de la partie abélienne du \mathcal{O}_L -schéma semi-abélien \mathcal{G}_x . Par définition, on a $X^{\text{rig}}(v) = \bar{X}^{\text{rig}}(v) \cap X^{\text{rig}}$ pour tout $v \in \mathbf{Q} \cap]0, 1[$. Plus précisément, considérons le diagramme cartésien de schémas formels

$$\begin{array}{ccccc} X^f(v) & \hookrightarrow & \bar{X}^f(v) & \longleftarrow & D^f(v) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X^f & \hookrightarrow & \bar{X}^f & \longleftarrow & D^f \end{array}$$

où les flèches verticales sont des immersions ouvertes suivies d'éclatements. On peut prendre pour cartes locales définissant $X^f(v) \subset \bar{X}^f(v)$ les images inverses de celles définissant $X^f \subset \bar{X}^f$; comme l'image de $D^f(v)$ dans D^f rencontre toutes les composantes irréductibles de D (c'est déjà vrai pour le lieu ordinaire), on voit que le même argument que celui démontrant le principe de Koecher formel montre que la restriction fournit un isomorphisme

$$H^0(\bar{X}^{\text{rig}}(v), \omega^k) \cong H^0(X^{\text{rig}}(v), \omega^k) \quad (\text{KSur})$$

qu'on appellera principe de Koecher v -surconvergent.

On verra dans la section 9 qu'on peut prolonger le faisceau lisse \mathbb{L} de $X^{\text{rig}}(v)$ à $\bar{X}^{\text{rig}}(v)$ et ainsi définir une tour d'Igusa v -surconvergente $\bar{T}_{\infty, v}$ au-dessus de $\bar{X}^{\text{rig}}(v)$ et qu'on a, de façon analogue :

$$H^0(\bar{T}_{\infty, v}^{\text{rig}}(v), \mathcal{O}_{\bar{T}_{\infty, v}}) \cong H^0(T_{\infty, v}^{\text{rig}}(v), \mathcal{O}_{T_{\infty, v}}).$$

Notons encore Π la restriction à $\bar{X}^f(v)$ du morphisme de W -schémas $\Pi: \bar{X} \rightarrow X^*$. Dans la section 9, on définira et on étudiera un système compatible de morphismes $\Pi_{I, m}$ au-dessus de Π , entre les compactifications toroïdale et minimale de la tours d'Igusa v -surconvergente au-dessus de $X^f(v)$. Ceci permettra de démontrer le résultat clé d'orthonormalisabilité et de contrôle pour la spécialisation d'une famille en un point fixé.

4. Cristaux unités et correspondance de Katz

4.1 Correspondance de Katz dans le cas affine

Soit R une W -algèbre admissible formellement lisse, munie d'un morphisme de Frobenius ϕ semi-linéaire relevant le Frobenius de R/pR ; on suppose que R/pR est intègre et on fixe un point géométrique \bar{x} au-dessus du point générique de la fibre spéciale de $\text{Spec } R$. D'après l'exercice 14 de Bourbaki Alg. Comm. Chap.9 par.1, il existe un unique morphisme d'anneaux $R \rightarrow W(k(\bar{x}))$ compatible aux Frobenius. Soit R^{nr} l'extension non-ramifiée maximale de R dans $W(k(\bar{x}))$; le Frobenius de R s'étend de façon unique à R^{nr} en un relèvement du Frobenius de $R^{\text{nr}}/pR^{\text{nr}}$, encore noté ϕ . On note \widehat{R}^{nr} la complétion p -adique de R^{nr} . Soit

$\mathcal{G}_R = \text{Gal}(R^{\text{nr}}/R) = \pi_1(\text{Spec } R/pR, \bar{x})$; on note $\text{Rep}(\mathcal{G}_R)$ la catégorie des \mathbf{Z}_p -modules de type fini avec une action continue de \mathcal{G}_R et ΦM la catégorie des Φ -cristaux unités, c'est-à-dire des R -modules M de type fini munis d'un endomorphisme ϕ -semilinéaire Φ tels que $(1 \otimes \Phi): \phi^* M \rightarrow M$ soit bijectif.

La correspondance de Katz [Kat73, Remark 5.5] associe à un objet V de $\text{Rep}(\mathcal{G}_R)$, le Φ -module $M = (V \otimes \widehat{R^{\text{nr}}})^{\text{Gal}(R^{\text{nr}}/R)}$ où $\Phi = 1 \otimes \phi$ est ϕ -semilinéaire.

PROPOSITION 4.1.1. *Le foncteur K définit une équivalence de catégories de $\text{Rep}(\mathcal{G}_R)$ vers ΦM , d'inverse $(M, \phi) \mapsto (M \otimes \widehat{R^{\text{nr}}})^{\Phi \otimes \phi = 1}$.*

4.2 Correspondance de Katz faisceautique

Soit \mathcal{Q} un W -schéma formel admissible formellement lisse et connexe, muni d'un morphisme de Frobenius W -semi-linéaire ϕ relevant le Frobenius absolu de sa fibre spéciale \mathcal{Q}_k . On fixe un point géométrique \bar{x} au-dessus du point générique de \mathcal{Q}_k : on a alors (cf EGA IV, Th.18.1.2) une équivalence de catégories entre la catégorie des revêtements finis étales de \mathcal{Q} (i.e. des morphismes $\mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Q}$ tels que pour tout n , $\mathcal{Z} \otimes W/p^n W \rightarrow \mathcal{Q} \otimes W/p^n W$ soit fini étale) et la catégorie des revêtements finis étales de \mathcal{Q}_k . On introduit alors le site $\mathcal{Q}_{\text{fét}}$ des morphismes finis étales $T \rightarrow U$ sur les ouverts de Zariski U de \mathcal{Q} , les recouvrements $(T_i \rightarrow U_i)_i$ de $T \rightarrow U$ étant définis au sens naïf (suffisant pour notre situation) par des morphismes (étales) $g_i: T_i \rightarrow T$ tels que $\cup_i g_i(T_i) = T$. On a un morphisme de sites $v: \mathcal{Q}_{\text{fét}} \rightarrow \mathcal{Q}_{\text{Zar}}$ donné par $(T \rightarrow U) \mapsto U$ vers le site de Zariski \mathcal{Q}_{Zar} de \mathcal{Q} . Soit $\mathcal{O}_{\mathcal{Q}_{\text{fét}}}$ le faisceau « structural » qui associe à un revêtement fini étale $T \rightarrow U$ l'anneau $\Gamma(T, \mathcal{O}_T)$. Ce faisceau est muni d'un opérateur de Frobenius ϕ relevant canoniquement le Frobenius $\phi: \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{Q}$. Un faisceau \mathbb{V} sur $\mathcal{Q}_{\text{fét}}$ est dit localement constant s'il existe un recouvrement $(T_i \rightarrow U_i)_i$ de l'objet final $\mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{Q}$ tel que \mathbb{V} restreint à $T_{i,\text{fét}}$ soit constant. Les faisceaux finis localement constants \mathbb{V} sur $\mathcal{Q}_{\text{fét}}$ s'identifient aux faisceaux finis localement constants sur $\mathcal{Q}_{\text{fét}}$. Soit \mathbb{V} un faisceau localement constant fini sur $\mathcal{Q}_{\text{fét}}$; on lui associe un faisceau de Zariski $K(\mathbb{V}) = \mathbb{M} = v_*(\mathbb{V} \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{Q}_{\text{fét}}})$, muni du Frobenius Φ induit par celui de \mathcal{Q} . Le morphisme $\phi^* \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}$ associé à Φ est bijectif. Réciproquement, pour tout Φ -module de type fini et de torsion \mathbb{M} sur lequel Φ induit une bijection $\phi^* \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}$, on définit le faisceau localement constant \mathbb{V} des invariants par $\Phi \otimes \phi$ de $v^{-1} \mathbb{M} \otimes_{v^{-1} \mathcal{O}_{\mathcal{Q}_{\text{Zar}}}} \mathcal{O}_{\mathcal{Q}_{\text{fét}}}$. Par la théorie de Katz locale, ces deux foncteurs sont quasi-inverses l'un de l'autre. Le foncteur K est la correspondance de Katz faisceautique.

Pour étendre le foncteur K aux faisceaux lisses, on introduit, suivant [AGV72, SGA4 Exposé VI], le site $\mathcal{Q}_{\text{profét}}$ dont les objets sont les couples (U, T) où U est un ouvert de Zariski de \mathcal{Q} et $T = (T_n)$ est un système projectif de revêtements finis étales $T_n \rightarrow U$; un morphisme $g: (T' \rightarrow U') \rightarrow (T \rightarrow U)$ est un système projectif $g = (g_n)_n$ de morphismes $g_n: (T'_n \rightarrow U') \rightarrow (T_n \rightarrow U)$. Un recouvrement $(T_i \rightarrow U_i)_i$ de $T \rightarrow U$ est la donnée de morphismes $g_i = (g_{i,n}): T_i = (T_{i,n})_n \rightarrow T = (T_n)_n$ tels que $\cup_i g_{i,n}(T_{i,n}) = T_n$ pour tout n . Un système projectif $\mathbb{V} = (\mathbb{V}_m)$ de faisceaux localement constants sur $\mathcal{Q}_{\text{fét}}$ est dit lisse s'il existe un recouvrement de \mathcal{Q} par des ouverts de Zariski U_i et des tours $T_i = (T_{i,n})_n$ de revêtements finis étales $T_{i,n} \rightarrow U_i$ tels que pour tout m et pour tout n assez grand, la restriction de \mathbb{V}_m à $T_{i,n,\text{fét}}$ est constant. Une catégorie analogue a été introduite par P. Scholze dans [Sch13b, Sect. 3], On associe à ce système projectif un préfaisceau sur $\mathcal{Q}_{\text{profét}}$ dont les sections sur $T \rightarrow U$ sont

$$\varprojlim_n \left(\varinjlim_m \mathbb{V}_m(T_n) \right)$$

On note encore \mathbb{V} ce préfaisceau. On vérifie aisément la propriété de recollement qui fait de \mathbb{V}

un faisceau sur $\mathcal{Q}_{\text{profét}}$, appelé faisceau lisse. On dit qu'un système projectif $\mathbb{V} = (\mathbb{V}_m)$ est lisse de rang fini r sur \mathbf{Z}_p s'il existe un recouvrement $(T_i \rightarrow U_i)_i$ de $\mathcal{Q}_{\text{profét}}$ par des tours $T_i = (T_{i,n})_n$ de revêtements finis étales, et un système d'isomorphismes de faisceaux $\mathbb{V}_m \cong (\mathbf{Z}/p^m \mathbf{Z})^r$ sur $T_{i,n,\text{fét}}$ pour tout m , et pour tout n assez grand, compatibles quand m varie.

La donnée d'un groupe p -divisible étale G sur \mathcal{Q} fournit le faisceau lisse $\mathbb{V} = \underline{\mathbb{T}}_p G$ sur $\mathcal{Q}_{\text{profét}}$ donné par le système projectif des $\mathbb{V}_m = G[p^m]$.

On considère le morphisme de sites $v: \mathcal{Q}_{\text{profét}} \rightarrow \mathcal{Q}_{\text{Zar}}; (U, T) \mapsto U$ et le faisceau structural $\mathcal{O}_{\mathcal{Q}_{\text{profét}}}: (T \rightarrow U) \mapsto \left(\varinjlim_m H^0(T_m, \mathcal{O}_{T_m}) \right)^\wedge$, le chapeau désignant la complétion p -adique. On pose

$$K(\mathbb{V}) = v_*(\mathbb{V} \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{Q}_{\text{profét}}})$$

pour tout faisceau lisse \mathbb{V} . Il résulte facilement de ce qui précède que :

PROPOSITION 4.2.1. *Le foncteur K fournit une équivalence de catégories entre la catégorie des faisceaux lisses sur $\mathcal{Q}_{\text{profét}}$, localement libres de type fini sur \mathbf{Z}_p et les faisceaux de Zariski localement libres de rang fini \mathbb{M} munis d'un endomorphisme ϕ -semilinéaire Φ tel que $(1 \otimes \Phi): \phi^* \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}$ soit bijective.*

Prenons par exemple pour \mathcal{Q} le lieu ordinaire de la complétion le long de la fibre spéciale de la variété de Siegel X sur W . Il est muni du schéma abélien universel ordinaire $A \xrightarrow{f} \mathcal{Q}$ de dimension g , et du relèvement excellent ϕ de Frobenius associé au groupe canonique $A[p]^\circ$. La théorie cristalline fournit un endomorphisme ϕ -semilinéaire Φ sur $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\text{dR}}^1(A/\mathcal{Q})$. L'hypothèse d'ordinarité entraîne que le sous- Φ -module \mathcal{U} du Φ -cristal \mathcal{H} , caractérisé comme le plus grand sous- Φ -cristal unité, est localement libre de rang g sur $\mathcal{O}_{\mathcal{Q}}$. La limite projective $\underline{\mathbb{T}}_p A^{\text{ét}}$ définit un faisceau lisse de rang g sur $\mathcal{Q}_{\text{profét}}$ (cf *supra*), limite projective des composantes étales $A[p^n]^{\text{ét}}$ de $A[p^n]$ sur \mathcal{Q} . On note \mathbb{V}^\vee le \mathbf{Z}_p -dual d'un faisceau lisse \mathbb{V} localement libre sur \mathbf{Z}_p . Par autodualité du dévissage connexe-étale, on a $\underline{\mathbb{T}}_p A^{\text{ét}, \vee} = \underline{\mathbb{T}}_p A^\circ(-1)$.

PROPOSITION 4.2.2. *La correspondance de Katz envoie alors le faisceau lisse $\underline{\mathbb{T}}_p A^\circ(-1)$ sur le Φ -module \mathcal{U} .*

Ceci se démontre localement, comme la démonstration de [Kat73, Thm 4.2.2]. Nous donnons quelques détails dans la sous-section suivante en termes de l'application de Hodge-Tate.

Notons que sur le lieu ordinaire $\overline{\mathcal{Q}}$ d'une compactification toroïdale arithmétique \overline{X}^f de X^f sur W , le schéma semi-abélien \mathcal{G} ne définit pas un groupe p -divisible, mais que la suite des composantes neutres des schémas quasi-finis et plats $\mathcal{G}[p^n]^\circ$ forme bien un groupe de Barsotti-Tate de type multiplicatif. On a donc un faisceau lisse $\underline{\mathbb{T}}_p \mathcal{G}^\circ(-1)$ auquel on peut appliquer la correspondance de Katz. La cohomologie log-cristalline de la compactification de Kuga-Sato $\overline{A}/\overline{X}^f$ fournit un log-cristal $\mathcal{H}_{\text{logcris}}^1(\overline{A}/\overline{X}^f)$ qui est muni d'un Frobenius φ -semilinéaire pour le relèvement excellent du Frobenius φ donné par le groupe canonique $\mathcal{G}[p]^\circ$. Sa restriction au lieu ordinaire $\overline{\mathcal{Q}}$ admet un sous-log-cristal unité associé $\overline{\mathcal{U}} = \mathcal{H}_{\text{logcris}}^1(\overline{A}/\overline{\mathcal{Q}})^0$, qui est de rang g . Comme noté par Katz [Kat73, Sect.1.3 et 1.4], c'est en fait un cristal (il n'a pas de singularités). La démonstration de la proposition 9.1.1 plus bas a pour corollaire :

PROPOSITION 4.2.3. *L'image du faisceau lisse $\underline{\mathbb{T}}_p \mathcal{G}^\circ(-1)$ par la correspondance de Katz est égale à $\overline{\mathcal{U}}$.*

Ce résultat n'interviendra pas directement dans la suite, bien qu'il motive la construction du prolongement du faisceau de monodromie surconvergente à la compactification toroïdale.

L'idée est de montrer (avec les notations de 9.1), que sur chaque carte locale $\Xi_{P,\Sigma_P}^{\text{f,ord}}$ de $\overline{\mathcal{Q}}$, les déviassages

$$0 \rightarrow L_P^* \otimes \mathcal{O}_{\Xi_{P,\Sigma_P},\text{cris}} \rightarrow \overline{\mathcal{U}} \rightarrow \mathcal{H}_{\text{cris}}^1(A_P/Y_P)^0 \rightarrow 0$$

et

$$0 \rightarrow \mathbb{T}_p T_P \rightarrow \mathbb{T}_p \mathcal{G}^\circ \rightarrow \mathbb{T}_p A_P^\circ \rightarrow 0$$

sont tous deux donnés par la même classe d'extension, à savoir celle de l'extension de Raynaud. Comme les termes de gauche et de droite, tordus par (-1) , se correspondent par la correspondance de Katz, il en va de même pour les termes du milieu.

4.3 Correspondance de Katz et application de Hodge-Tate

Soit R une W -algèbre admissible formellement lisse munie d'un relèvement φ de l'endomorphisme de Frobenius. Rappelons que l'extension non ramifiée maximale R^{nr} de R est munie d'un endomorphisme qui étend φ de façon unique à R^{nr} et à $\widehat{R^{\text{nr}}}$, relevant l'endomorphisme de Frobenius de $R^{\text{nr}}/pR^{\text{nr}}$.

Soit G_n un schéma en groupes fini et plat annulé par p^n sur R , soit $G_n^\mathbb{D}$ son dual de Cartier. Le morphisme de Hodge-Tate

$$\alpha(G_n): G_n(R^{\text{nr}}) \rightarrow R^{\text{nr}} \otimes_R \omega_{G_n^\mathbb{D}/R}$$

est défini par

$$x \in G_n(R^{\text{nr}}) = \text{Hom}_{R^{\text{nr}}}(\mathbb{G}_m, G_n) \mapsto x^*\left(\frac{dT}{T}\right)$$

Soit alors G un groupe p -divisible étale sur R . Pour $n \in \mathbf{N}_{>0}$, les morphismes de Hodge-Tate $\alpha_{G[p^n]}: G[p^n](R^{\text{nr}}) \rightarrow R^{\text{nr}} \otimes_R \omega_{G[p^n]^\mathbb{D}/R}$ forment un système projectif : en passant à la limite, on obtient le morphisme de Hodge-Tate

$$\alpha_G: \mathbb{T}_p G \rightarrow \widehat{R^{\text{nr}}} \otimes_R \omega_{G^\mathbb{D}/R}$$

Par $\widehat{R^{\text{nr}}}$ -linéarité, ce dernier fournit un morphisme \mathcal{G}_R -équivariant appelé morphisme de périodes

$$1 \otimes \alpha_G: \widehat{R^{\text{nr}}} \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbb{T}_p G \rightarrow \widehat{R^{\text{nr}}} \otimes_R \omega_{G^\mathbb{D}/R}$$

Ce dernier est un isomorphisme ; en effet, G est étale sur R de sorte qu'on peut supposer que $G = (\mathbf{Q}_p / \mathbf{Z}_p)^h$, et même $G = \mathbf{Q}_p / \mathbf{Z}_p$, cas dans lequel c'est immédiat.

On applique ceci à un ouvert affine $\text{Spf}(R)$ du lieu ordinaire Q^{f} et à $G = A[p^\infty]^{\text{ét}}$ en notant que $\omega_{A[p^\infty]^\circ/R} = \omega_{A/R}$. On obtient l'application de Hodge-Tate

$$\text{HT}_R: \mathbb{T}_p A^{\text{ét}} \rightarrow \widehat{R^{\text{nr}}} \otimes_R \omega_{A/R}$$

Observons que si l'on compose l'isomorphisme dual inverse $(\text{Id}_{\widehat{R^{\text{nr}}}} \otimes \text{HT}_R)^{\vee-1}$

$$\widehat{R^{\text{nr}}} \otimes_R \mathbb{T}_p A^{\text{ét},\vee} \rightarrow \widehat{R^{\text{nr}}} \otimes_R \omega_{A/R}^\vee$$

avec l'isomorphisme $\omega_{A/R}^\vee \cong U$, on obtient un isomorphisme

$$\widehat{R^{\text{nr}}} \otimes_R \mathbb{T}_p A^{\text{ét},\vee} \rightarrow \widehat{R^{\text{nr}}} \otimes_R U$$

qui, en prenant les invariants par $\phi \otimes \Phi$, induit la correspondance de Katz :

$$K(\mathbb{T}_p A^{\text{ét},\vee}) = U$$

voir les détails sur l'action de Frobenius dans [Kat73, pp.148-149].

Observons également que l'application de Hodge-Tate HT_R est équivariante sous le groupe de Galois de R^{nr}/R . En fait pour toute extension p -adiquement complète S de R contenue dans $\widehat{R^{\mathrm{nr}}}$, on a

$$\widehat{R^{\mathrm{nr}}}^{\mathrm{Gal}(R^{\mathrm{nr}}/S)} = S$$

par descente étale modulo p .

On souhaite globaliser cette application de Hodge-Tate. Observons d'abord que tout faisceau cohérent \mathcal{F} sur $\mathcal{Q}_{\mathrm{Zar}}$ fournit un faisceau, encore noté \mathcal{F} , sur $\mathcal{Q}_{\mathrm{profét}}$ donné par

$$(T_m \rightarrow f_m \rightarrow U) \mapsto \left(\varinjlim_m H^0(T_m, f_m^* \mathcal{F}) \right)^\wedge$$

où le chapeau désigne la complétion p -adique. On applique cette construction au faisceau $\omega_{A/\mathcal{Q}}$. On observe d'autre part que $\omega_{A[p^n]^\circ/\mathcal{Q}} \otimes \mathbf{Z}/p^n \mathbf{Z} = \omega_{A/\mathcal{Q}} \otimes \mathbf{Z}/p^n \mathbf{Z}$ et que les applications

$$\mathrm{HT}_n = \alpha(A[p^n]^\mathrm{ét}) : A[p^n]^\mathrm{ét} \rightarrow \omega_{A/\mathcal{Q}} \otimes \mathbf{Z}/p^n \mathbf{Z}$$

forment un système projectif de morphismes de faisceaux sur $\mathcal{Q}_{\mathrm{fét}}$ et donc sur $\mathcal{Q}_{\mathrm{profét}}$. On déduit de ce qui précède un morphisme de faisceaux sur $\mathcal{Q}_{\mathrm{profét}}$:

$$\mathrm{HT} : \underline{\mathbb{T}}_p A^\mathrm{ét} \hookrightarrow \omega_{A/\mathcal{Q}}$$

qui est compatible aux morphismes de faisceaux HT_n sur les sites $(\mathcal{Q} \otimes \mathbf{Z}/p^n \mathbf{Z})_{\mathrm{fét}}$ via les morphismes évidents de sites $\mathcal{Q}_{\mathrm{profét}} \rightarrow (\mathcal{Q} \otimes \mathbf{Z}/p^n \mathbf{Z})_{\mathrm{profét}}$.

DÉFINITION 4.3.1. Le morphisme de faisceaux HT s'appelle application de Hodge-Tate faisceautique ordinaire.

5. Tour d'Igusa ordinaire

Dans cette section, on note $Q^f = X^f(0)$ le W -schéma formel des points de X^f à réduction ordinaire (voir fin de la section 2).

5.1 Dévissage connexe-étale

Sur Q^f , la composante neutre $A[p^\infty]^\circ$ de $A[p^\infty]$ est un groupe p -divisible de type multiplicatif de rang g et on a le dévissage connexe-étale

$$0 \rightarrow A[p^\infty]^\circ \rightarrow A[p^\infty] \rightarrow A[p^\infty]^\mathrm{ét} \rightarrow 0$$

En identifiant A à sa duale, on obtient par l'accouplement de Weil un isomorphisme de $A[p^\infty]$ avec son dual de Cartier, et cette autodualité échange $A[p^\infty]^\circ$ et $A[p^\infty]^\mathrm{ét}$. Le sous-schéma en groupes $H_n = A[p^n]^\circ$ fournit un relèvement au schéma formel Q^f du noyau de l'endomorphisme $F r^n$ puissance n -ième du Frobenius relatif de A sur la fibre spéciale du lieu ordinaire. On l'appelle le sous-groupe canonique de niveau n . Le sous-groupe H_1 de niveau 1 permet de définir le relèvement excellent de Frobenius $\phi : Q^f \rightarrow Q^f$ donné par $A_{\phi(x)} = A_x/H_{1,x}$. On note encore ϕ l'endomorphisme du faisceau \mathcal{O}_{Q^f} .

5.2 Tour d'Igusa

On forme la tour de revêtements $T_n^f \rightarrow Q^f$ définis par

$$T_n^f = \mathrm{Isom}_{X^f(0)}(\mu_{p^n}^g, A[p^n]^\circ).$$

Considérons le schéma fini étale $P_n = \text{Hom}(\mu_{p^n}, A[p^n]^\circ) = A[p^n]^\circ(-1)$; T_n^f est le torseur des $\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$ -bases $\underline{v} = (v_1, \dots, v_g)$ de P_n . Le groupe $\text{GL}_g(\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})$ agit naturellement à gauche sur T_n^f par $\gamma \bullet v = (v_1, \dots, v_g) \cdot \gamma^{-1}$. Les revêtements $T_n^f \rightarrow X^f(0)$ sont finis étales de groupe $\text{GL}_g(\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})$; ces revêtements sont géométriquement connexes (cf [FC90, Chap. V, Prop. 7.2]). Soit $P_\infty = \varprojlim_n P_n$. Le proschéma formel $T_\infty^f = \varprojlim_n T_n^f$ classe les \mathbf{Z}_p -bases de P_∞ . En passant aux espaces rigides quasi-compacts associés à ces schémas formels, on obtient une tour $T_n = T_n^{\text{rig}} \rightarrow X^{\text{rig}}(0)$, de limite projective $T_\infty \rightarrow X^{\text{rig}}(0)$.

En fixant un point générique géométrique x de X^{rig} (et donc un point géométrique \bar{x} de $X \otimes W/pW$), on a aussi une suite exacte de $\pi_1(X^{\text{rig}}(0), x)$ -modules pour les modules de Tate de A_x :

$$0 \rightarrow T_p A_x^\circ \rightarrow T_p A_x \rightarrow T_p A_x^{\text{ét}} \rightarrow 0$$

où le groupe fondamental algébrique classe les revêtements finis étales connexes de $X^{\text{rig}}(0)$. On note $\rho_0: \pi_1(X^{\text{rig}}(0), x) \rightarrow \text{GL}_g(\mathbf{Z}_p)$ la représentation définie par $T_p A_x^\circ$ (observer que $T_p A^\circ$ est lisse sur $X^{\text{rig}}(0)$ et que $\rho_0(-1)$ se prolonge à $\pi_1(Q^f \times W/pW, \bar{x})$).

La théorie du groupe fondamental montre que la représentation $\rho_0(-1)$ fournit un faisceau lisse $\underline{T}_p A^{\text{ét}, \vee}$ sur Q^f .

Le faisceau localement libre $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\text{dR}}^1(A/Q^f)$ est muni d'un endomorphisme de Frobenius Φ semi-linéaire par rapport au relèvement excellent ϕ de Frobenius sur le lieu ordinaire \mathcal{O}_{Q^f} . Soit $\mathcal{U} \subset \mathcal{H}$ le cristal unité de Katz 4.3; la correspondance de Katz envoie le faisceau lisse $\underline{T}_p A^{\text{ét}, \vee}$ sur le Φ -module \mathcal{U} (voir Prop.4.2.2).

REMARQUE 5.2.1. Notons que si la représentation $\pi_1(Q^f \times W/pW) \rightarrow \text{GL}(V)$ se factorise par $\rho_0(-1)$, le faisceau lisse \mathcal{V} associé à la représentation V est le faisceau des sections du fibré $M_0 \setminus (V \times T_\infty^f)$ au-dessus de Q^f .

5.3 Tour d'Igusa et variétés de Siegel de niveau parahorique

Désormais, on note à nouveau $X^f(0)$ le lieu ordinaire et Q le parahorique de Siegel de Sp_{2g} . Pour tout $n \in \mathbf{N}_{>0}$, on introduit des modèles définis sur $\mathbf{Q}(\zeta_N)$ des variétés de Siegel $X_Q(p^n)$ (resp. $X_U(p^n)$) associées aux sous-groupes de Γ des éléments γ dont la réduction mod p^n appartient à $Q(\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})$ (resp. à $U(\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})$); on notera $X_Q(p^n)_K$ resp. $X_U(p^n)_K$ leur changement de base de $\mathbf{Q}(\zeta_N)$ à K . On définit ces modèles comme les espaces de modules (fins) pour les classes d'isomorphisme de triplets (A, α, H'_n) (resp. $(A, \alpha, H'_n, \underline{\psi})$) où A est une variété abélienne principalement polarisée de dimension g , α est une structure de niveau N modulo Γ , et H'_n un sous-BT $_n$ isotrope maximal de $A[p^n]$, resp. $\underline{\psi}'$ est un isomorphisme

$$\underline{\psi}': \mu_{p^n}^g \cong H'_n$$

Ces variétés sont géométriquement connexes sur K . Les flèches d'oubli fournissent des revêtements finis $X_U(p^n)_K \rightarrow X_Q(p^n)_K \rightarrow X_K$. En passant à la limite projective sur n , on obtient des proschémas $X_Q(p^\infty)_K$ et $X_U(p^\infty)_K$ (sur K). On considère alors les modèles sur W définis comme la clôture normale de X/W dans leur fibre générique. Ils sont munis de morphismes propres prolongeant les flèches d'oubli $X_U(p^n)_W \rightarrow X_Q(p^n)_W \rightarrow X_W$.

Sur $X^{\text{rig}}(0)$, le groupe de Barsotti-Tate canonique $H_\infty = A[p^\infty]^\circ$ fournit une section $X^{\text{rig}}(0) \rightarrow X_Q^{\text{rig}}(p^\infty)_K$. Par normalisation, cette section préserve l'intégralité, et on a donc une immersion ouverte $X^f(0) \rightarrow X_Q(p^\infty)_W$; cette section possède un relèvement canonique $T_\infty^f \rightarrow X_U^f(p^\infty)_W$ envoyant l'isomorphisme $\underline{\psi}: \mu_{p^\infty}^g \cong H_\infty$ sur le point de $X_U^f(p^\infty)_W$ qu'il définit par adhérence schématique; par ce morphisme, l'image de la tour d'Igusa est la composante

connexe du lieu ordinaire de la fibre spéciale de $X_U(p^\infty)_W$ où le groupe de Barsotti-Tate H'_∞ est de type multiplicatif.

6. Le faisceau lisse surconvergent et l'application de Hodge-Tate

6.1 Représentation de monodromie et faisceaux localement constants surconvergents

Dans un travail récent, deux des auteurs [BM10] ont étendu, sous l'hypothèse $p > 3$, la représentation de monodromie associée à la famille universelle au-dessus du lieu ordinaire $X^{\text{rig}}(0)$ à un voisinage strict $X^{\text{rig}}(v)$, pour $v > 0$ suffisamment petit. Leur approche généralise la description de Katz de $\underline{T}_p A^\circ(-1)$ en termes du sous-cristal unité $\mathcal{U} \subset \mathcal{H}_{\text{cris}}^1(A/X^f(0))$. Notons $\underline{T}_p A^\circ$ le faisceau lisse rigide associé au groupe p -divisible $A[p^\infty]^\circ$ étale sur l'espace rigide $X^{\text{rig}}(0)$. On suppose désormais $p > 3$. Soit $v_{\text{BM}} = \frac{1}{1+2p(g+\frac{1}{p-1})}$.

THÉORÈME 6.1.1. *Pour tout nombre rationnel v tel que $0 < v < \frac{v_{\text{BM}}}{p}$, la représentation galoisienne*

$$\rho_0 : \pi_1(X^{\text{rig}}(0), x) \rightarrow \text{GL}_g(\mathbf{Z}_p)$$

du groupe fondamental algébrique de $X^{\text{rig}}(0)$ donnée par le faisceau lisse $\underline{T}_p A^\circ$ s'étend en une représentation

$$\rho_v : \pi_1(X^{\text{rig}}(v), x) \rightarrow \text{GL}_g(\mathbf{Z}_p).$$

REMARQUE 6.1.2. (1) la borne $\frac{v_{\text{BM}}}{p}$ n'est pas optimale (elle ne l'est pas pour $g = 1$).

(2) Dans cet article, le groupe fondamental algébrique $\pi_1(Y, y)$ d'un espace rigide Y connexe est le groupe qui classe les revêtements finis étales de Y . Si le K -espace rigide Y est associé au W -schéma formel affine normal $Y^f = \text{Spf}(R)$, de point générique géométrique y fixé, le groupe $\pi_1(Y, y)$ classe les extensions finies normales S de R dans une clôture algébrique fixée $\overline{\text{Frac}}(R)$ du corps $\text{Frac}(R)$, telles que $S[p^{-1}]$ soit étale sur $R[p^{-1}]$. On note $\bar{R} \subset \overline{\text{Frac}}(R)$ la réunion des extensions finies S définies ci-dessus. On l'appelle la clôture normale étale hors de p de R . On pose $\mathcal{G}_R = \text{Gal}(\bar{R}/R)$ et on a une identification canonique $\mathcal{G}_R = \pi_1(Y^{\text{rig}}, y)$ où $y = \text{Spec}(\overline{\text{Frac}}(R))$.

On suppose désormais que $v \in \mathbf{Q} \cap [0, \frac{v_{\text{BM}}}{p}]$, de sorte que l'espace rigide $X^{\text{rig}}(v)$ est quasi-compact. Considérons le site $X^{\text{rig}}(v)_{\text{fét}}$ des revêtements finis étales $T \rightarrow U$ des ouverts rigides quasi-compacts U de $X^{\text{rig}}(v)$, les recouvrements $(T_i \rightarrow U_i)_i$ d'un ouvert $T \rightarrow U$ étant donnés par des morphismes $g_i : T_i \rightarrow T$ tels que $\bigcup_i g_i(T_i) = T$. Il est immédiat qu'il s'agit bien d'un site.

La représentation ρ_v fournit, par la théorie du groupe fondamental algébrique rigide, un système projectif $\mathbb{L} = (\mathbb{L}_m)_m$ de faisceaux sur $X^{\text{rig}}(v)_{\text{fét}}$ localement libres de rang g sur $\mathbf{Z}/p^m \mathbf{Z}$, prolongeant le système projectif $(A[p^m]^\circ)_m$ de faisceaux définis sur $X^{\text{rig}}(0)_{\text{fét}}$ [BM10, Théorème 3.22 et sa démonstration 5.37]. Si $v' < v$ les systèmes projectifs ainsi définis sont compatibles sur $X^{\text{rig}}(v')_{\text{fét}}$.

DÉFINITION 6.1.3. Pour tout $0 < v < \frac{v_{\text{BM}}}{p}$, on appelle faisceau de monodromie surconvergent le système projectif $\mathbb{L} = (\mathbb{L}_m)_m$ de faisceaux localement constants sur $X^{\text{rig}}(v)_{\text{fét}}$ associé à la représentation $\rho_v : \pi_1(X^{\text{rig}}(v)) \rightarrow \text{GL}_g(\mathbf{Z}_p)$.

On va rappeler la construction de ρ_v et des faisceaux \mathbb{L}_m sur $X^{\text{rig}}(v)_{\text{fét}}$ pour $v \in \mathbf{Q}^+$ tel que $v < \frac{v_{\text{BM}}}{p}$, puis on définira l'application de Hodge-Tate, et enfin la tour d'Igusa surconvergente.

On procède par recollement de faisceaux localement constants sur les sites $\Omega'_{\text{fét}}$ où Ω' parcourt un recouvrement admissible affinoïde de $X^{\text{rig}}(v)$. Pour un tel ouvert, on fixera un modèle admissible normal naturel R' de l'algèbre affinoïde $A(\Omega')$ et on définira un sous-cristal $\mathcal{U}_{R'}$ « presque unité » du module de Dieudonné contravariant de A/R' (voir 6.3).

6.2 Anneaux de périodes

Soit R une W -algèbre admissible normale quelconque ; soit $\mathcal{R} = \varprojlim \bar{R}/p\bar{R}$ et $W(\mathcal{R})$ son anneau des vecteurs de Witt. Il est muni d'un relèvement ϕ de $x \mapsto x^p$.

Notons que $\text{Gal}(\bar{R}/R)$ agit sur $W(\mathcal{R})$ et commute à ϕ . On a un morphisme d'anneaux Galois-équivariant $\theta: W(\mathcal{R}) \rightarrow \widehat{\bar{R}}$ (cf [Bri08]).

L'idéal $J = \theta^{-1}(p^{1-\frac{1}{p}}\widehat{\bar{R}}) = \text{Ker}(\theta) + [\tilde{p}]^{1-\frac{1}{p}}W(\mathcal{R})$ permet de définir l'anneau $\tilde{A}_{\text{cris}}^{\nabla}(R)$ comme la complétion p -adique de l'enveloppe à puissances divisées de $W(\mathcal{R})$ pour J : cet anneau est muni d'une action de $\text{Gal}(\bar{R}/R)$ et d'un opérateur de Frobenius φ prolongeant celui de $W(\mathcal{R})$. Rappelons que l'idéal $\text{Ker}(\theta)$ est principal dans $W(\mathcal{R})$, engendré par $\xi = [\tilde{p}] - p$ où $[\tilde{p}] \in W(\mathcal{R})$ désigne le représentant de Teichmüller d'un système projectif $\tilde{p} = (p, p^{1/p}, p^{1/p^2}, \dots)$. L'idéal J est donc engendré par ξ et $[\tilde{p}]^{1-\frac{1}{p}}$. Soit $J^{[1]}$ l'idéal topologiquement engendré par J dans $\tilde{A}_{\text{cris}}^{\nabla}(R)$; il n'est pas principal. On note $\text{Fil}^r \tilde{A}_{\text{cris}}^{\nabla}(R)$ l'adhérence dans $\tilde{A}_{\text{cris}}^{\nabla}(R)$ pour la topologie p -adique de la r -ième puissance divisée de $J^{[1]}$.

Soit $\Lambda_0(R) = W(\mathcal{R})/([\zeta]-1)^{p-2}([\zeta]^{\frac{1}{p}}-1)W(\mathcal{R})$ où $[\zeta]$ désigne le relèvement de Teichmüller d'une base du module de Tate du groupe multiplicatif. On montre que

$$\Lambda_0(R) \cong \tilde{A}_{\text{cris}}^{\nabla}(R)/I^{\{p-1\}} \tilde{A}_{\text{cris}}^{\nabla}(R)$$

où $I^{\{p-1\}} \tilde{A}_{\text{cris}}^{\nabla}(R) = \{x \in J^{[p-2]} \tilde{A}_{\text{cris}}^{\nabla}(R), (\forall m \geq 0) \varphi^m(x) \in J^{[p-1]} \tilde{A}_{\text{cris}}^{\nabla}(R)\}$. Par conséquent, $\Lambda_0(R)$ est une $\tilde{A}_{\text{cris}}^{\nabla}(R)$ -algèbre malgré l'absence apparente de puissances divisées dans sa définition. On note $J^{[1]} \Lambda_0(R)$ l'idéal image de J dans $\Lambda_0(R)$, cet idéal est principal engendré par l'image de ξ dans $\Lambda_0(R)$, qu'on notera encore ξ .

Pour tout $\alpha \in \mathbf{Q} \cap [0, p[$, soit $\tilde{\Lambda}_{\alpha}(R) = \Lambda_0(R)[T_{\alpha}]/([\tilde{p}]^{\alpha}T_{\alpha} - p)$; on note $\Lambda_{\alpha}(R)$ le séparé complété du quotient de $\tilde{\Lambda}_{\alpha}(R)$ par sa p -torsion. C'est donc une $\tilde{A}_{\text{cris}}^{\nabla}(R)$ -algèbre sans p -torsion. L'idéal $J^{[1]} \Lambda_{\alpha}(R)$ engendré par l'image de $\text{Ker}(\theta)$ est aussi principal engendré par ξ .

Si $\alpha \in [0, 1[\cap \mathbf{Q}$, le Frobenius σ de $W(\mathcal{R})$ induit un morphisme $\varphi: \Lambda_{\alpha}(R) \rightarrow \Lambda_{p\alpha}(R)$ tel que $\varphi(T_{\alpha}) = T_{p\alpha}$; on introduit enfin le morphisme $v: \Lambda_{\alpha}(R) \rightarrow \Lambda_{p\alpha}(R)$ donné par $v(T_{\alpha}) = [\tilde{p}]^{(p-1)\alpha}T_{p\alpha}$.

6.3 Le cristal presque unité

On fixe dans toute la suite un nombre rationnel $0 < v < v_{\text{BM}}/p$ (en particulier, $v < \frac{1}{2}$), et une extension finie \mathcal{K} de K , contenant un élément de valuation $\frac{v}{p}$, qu'on note $p^{\frac{v}{p}}$ et on pose $p^v = (p^{\frac{v}{p}})^p$; on note $\mathcal{O}_{\mathcal{K}}$ l'anneau de valuation de \mathcal{K} ; c'est une extension finie et plate de W . Dans toute la suite, on fixe un recouvrement admissible par des ouverts affinoïdes Ω de $X^{\text{rig}}(v)_{\mathcal{K}}$ ainsi que leurs modèles entiers $\text{Spf } R$ de la manière suivante. On forme un recouvrement du $\mathcal{O}_{\mathcal{K}}$ -schéma formel X^f par des ouverts formels affines $\text{Spf } R_0$ formellement lisses sur $\mathcal{O}_{\mathcal{K}}$ et on introduit $R = R_0\{\frac{p^v}{h}\}$ et $R' = R_0\{\frac{p^{\frac{v}{p}}}{h}\}$, h désignant un relèvement de l'invariant de Hasse évalué sur une base locale ω des différentielles relatives Ω_{A/R_0} . Notons que l'anneau R ne dépend pas du choix du relèvement h car si $h_1 = h + p\alpha$, $\alpha \in R_0$ est un

autre choix, on a $\frac{p^v}{h_1} = \frac{p^v}{h(1+\frac{p^\alpha}{h})} = \frac{p^v}{h} \cdot (1 - \alpha \frac{p}{h} + \alpha^2 (\frac{p}{h})^2 + \dots)$ et en observant que $\frac{p}{h} = p^{1-v} \cdot \frac{p^v}{h}$, on voit que $\frac{p^v}{h_1} \in R_0\{\frac{p^v}{h}\}$ et que $R_0\{\frac{p^v}{h_1}\} = R_0\{\frac{p^v}{h}\}$.

Les ouverts formels $\mathbf{Spf} R$ ainsi fixés forment un recouvrement du modèle minimal entier normal $X^f(v)$ de $X^{\text{rig}}(v)$ sur lequel s'étend le schéma en groupes canonique H_1 (voir Andreatta-Gasbarri (cf [AG07, Theorem 10.6])).

Soit \mathcal{H} le cristal sur X^f donné par le faisceau de cohomologie relative $H_{\text{cris}}^1(A/X)$ et \mathcal{H}_R son pull-back sur $\mathbf{Spf}(R)$.

La filtration de Hodge

$$0 \rightarrow \omega_{A/X} \rightarrow H_{\text{dR}}^1(A/X) \rightarrow \omega_{A/X}^\vee \rightarrow 0$$

fournit par extension des scalaires une suite exacte courte de R -modules projectifs :

$$0 \rightarrow \omega_{A_R/R} \rightarrow H_{\text{dR}}^1(A_R/R) \rightarrow \omega_{A_R/R}^\vee \rightarrow 0$$

On a un isomorphisme canonique (et fonctoriel) $\mathcal{H}_R \cong H_{\text{dR}}^1(A_R/R)$. On note $\text{Fil } \mathcal{H}_R$ l'image de $\omega_{A/R}$ dans \mathcal{H}_R via cet isomorphisme.

On considère le $\tilde{A}_{\text{cris}}^\nabla(R)$ -module

$$\mathcal{M}_R = H_{\text{cris}}^0(\text{Spec}(\bar{R}/p^{1-\frac{1}{p}}\bar{R})/\mathbf{Spf}(W), \mathcal{H}_R)$$

Rappelons en outre que si $w < \frac{1}{p+1}$, la donnée du groupe canonique induit un relèvement de Frobenius $\varphi: X^f(w) \rightarrow X^f(pw)$ par [FT10, Théorème 8]. Fixons $v < \frac{1}{2}$; on a $\frac{v}{p} < \frac{1}{p+1}$, de sorte qu'on dispose du relèvement excellent de Frobenius $\varphi: X^f(\frac{v}{p}) \rightarrow X^f(v)$.

On considère l'injection $R \rightarrow R'$ entre les \mathcal{O}_K -algèbres R et R' définies ci-dessus, donnée par $\frac{p^v}{h} \mapsto (p^{v/p})^{p-1} \cdot \frac{p^{v/p}}{h}$; ce morphisme induit une immersion stricte d'affinoïdes $(\mathbf{Spf}(R'))^{\text{rig}} \subset (\mathbf{Spf}(R))^{\text{rig}}$ et un morphisme $\iota_R: \mathbf{Spf}(R') \rightarrow \mathbf{Spf}(R)$ formé d'une immersion ouverte suivie d'un éclatement admissible. Notons que φ envoie $\mathbf{Spf}(R')$ dans $\mathbf{Spf}(R)$; on note φ_R sa restriction à $\mathbf{Spf}(R')$. On obtient ainsi un *relèvement surconvergent de Frobenius* :

$$(\varphi_R, \iota_R): \mathbf{Spf}(R') \rightrightarrows \mathbf{Spf}(R)$$

donné par des morphismes φ_R et ι_R tels que $\iota_R \circ \text{Frob} \equiv \varphi_R \pmod{p^{1-\frac{v}{p}}R'}$.

Par construction, on a aussi un morphisme de Frobenius surconvergent Φ sur \mathcal{H} , compatible avec φ , induisant un morphisme linéaire $\Phi_{R'}: \varphi_R^* \mathcal{H}_R \rightarrow \iota_R^* \mathcal{H}_R$; il satisfait $\Phi_{R'}(\varphi_R^* \text{Fil } \mathcal{H}_R) \subset p^{1-\frac{v}{p}} \iota_R^* \mathcal{H}_R$. De plus, par fonctorialité, il induit un morphisme de Frobenius $\tilde{A}_{\text{cris}}^\nabla(R')$ -linéaire $\Phi: \varphi^* \mathcal{M}_{R'} \rightarrow \mathcal{M}_{R'}$ où ϕ désigne le Frobenius cristallin (induit par le Frobenius de $W(\mathcal{R}')$). Pour $\varepsilon \in \mathbf{Q} \cap [0, 1]$, notons $\text{pr}_\varepsilon: \mathcal{M}_{R'} \rightarrow \mathcal{M}_{R'}/[\tilde{p}]^\varepsilon \mathcal{M}_{R'}$ la projection canonique.

THÉORÈME 6.3.1. *Si $v < v_{BM}(< \frac{1}{2})$,*

(1) *le sous- $\tilde{A}_{\text{cris}}^\nabla(R')$ -module*

$$\tilde{\mathcal{M}}_{R'} := \text{pr}_{1-v}^{-1}(\text{Ker}(1 \otimes \bar{\Phi}_{R'})) + [\tilde{p}]^v \mathcal{M}_{R'} \subset \mathcal{M}_{R'}$$

est libre de rang $2g$ (où $\bar{\Phi}_{R'}$ désigne la réduction de $\Phi_{R'}$ modulo $[\tilde{p}]^{1-v}$);

(2) *il existe un unique sous-module $\mathcal{U}_{R'} \subset \mathcal{M}_{R'}$ sur $\tilde{A}_{\text{cris}}^\nabla(R')$ stable par $\Phi_{R'}$ et par $\mathcal{G}_{R'}$ tel que :*

(i) *$\mathcal{U}_{R'}$ soit libre de rang g , facteur direct dans $\tilde{\mathcal{M}}_{R'}$;*

(ii) *$\det(\Phi_{R'}|_{\mathcal{U}_{R'}})$ divise $[\tilde{p}]^{v(1+(p-1)g)}$,*

Notons que la filtration de Hodge $\text{Fil } \mathcal{H}_R \subset \mathcal{H}_R$ induit non-canoniquement une filtration $\text{Fil } \mathcal{M}_{R'} \subset \mathcal{M}_{R'}$ par un sous- $\tilde{\mathcal{A}}_{\text{cris}}^\nabla(R')$ -module projectif (voir sa construction dans A.3 ci-dessous). Pour une telle filtration, on a une décomposition en somme directe

$$\widetilde{\mathcal{M}}_{R'} = \mathcal{U}_{R'} \oplus \text{Fil } \mathcal{M}_{R'}.$$

Le théorème ci-dessus ainsi que cette décomposition sont démontrés dans [BM10, Proposition 4.27 et théorème 4.28].

6.4 La représentation de Galois surconvergente et les faisceaux \mathbb{L}_m

Revenons à la situation générale et aux notations de 6.2. Soit $\alpha \in]0, 1] \cap \mathbf{Q}$. Le Frobenius σ de $W(\mathcal{R})$ induit un morphisme d'anneaux $\varphi: \Lambda_\alpha(R) \rightarrow \Lambda_{p\alpha}(R)$. et l'on a $\varphi(J^{[1]}\Lambda_\alpha(R)) \subset p\Lambda_{p\alpha}(R)$; comme $\Lambda_{p\alpha}(R)$ est sans p -torsion, on peut définir l'application semilinéaire

$$\begin{aligned} \varphi_1: J^{[1]}\Lambda_\alpha(R) &\rightarrow \Lambda_{p\alpha}(R) \\ \lambda &\mapsto \varphi(\lambda)/p \end{aligned}$$

Rappelons qu'on a défini un morphisme d'anneaux $v: \Lambda_\alpha(R) \rightarrow \Lambda_{p\alpha}(R)$.

Pour tout $\tilde{\mathcal{A}}_{\text{cris}}^\nabla(R)$ -module \mathcal{U} muni d'un endomorphisme ϕ semilinéaire (c'est à dire compatible au Frobenius de $\tilde{\mathcal{A}}_{\text{cris}}^\nabla(R)$), on définit un morphisme *syntomique*

$$J^{[1]}\Lambda_\alpha(R) \otimes_{\tilde{\mathcal{A}}_{\text{cris}}^\nabla(R)} \mathcal{U} \xrightarrow{\phi_1 \otimes \phi - v \otimes 1} \Lambda_{p\alpha}(R) \otimes_{\tilde{\mathcal{A}}_{\text{cris}}^\nabla(R)} \mathcal{U}$$

qu'on note $\mathcal{S}_\alpha(\mathcal{U})$. Il est \mathbf{Z}_p -linéaire. Supposons que \mathcal{U} soit muni d'une action continue de \mathcal{G}_R qui commute à ϕ . D'après [BM10, Section 5.19], les anneaux $\Lambda_\alpha(R)$ et $\Lambda_{p\alpha}(R)$ sont aussi munis d'une action continue naturelle de \mathcal{G}_R ; les morphismes v et φ sont \mathcal{G}_R -équivalents et continus pour la topologie p -adique; il en est donc de même du morphisme syntomique. On définit le *module syntomique*

$$\mathbf{V}_\alpha(\mathcal{U}) := \text{Ker}(\mathcal{S}_\alpha(\mathcal{U}))$$

comme le noyau de ce morphisme. On obtient ainsi un \mathbf{Z}_p -module muni d'une action continue de \mathcal{G}_R . Citons alors le [BM10, Théorème 5.40] :

THÉORÈME 6.4.1. *Supposons $p > 3$. Soit \mathcal{U} un $\tilde{\mathcal{A}}_{\text{cris}}^\nabla(R)$ -module libre de rang r , muni d'un endomorphisme ϕ semilinéaire, tel que $\tilde{p}^{p^\varepsilon} \in \det(1 \otimes \phi)$ avec $\varepsilon \in [0, \frac{1}{2p}]$. Alors pour tout $\alpha \in \mathbf{Q} \cap [2\varepsilon, \frac{1}{p}]$, le \mathbf{Z}_p -module $\mathbf{V}_\alpha(\mathcal{U})$ est libre de rang r , muni d'une action continue de \mathcal{G}_R .*

On applique ce théorème au $\tilde{\mathcal{A}}_{\text{cris}}^\nabla(R')$ -module $\mathcal{U}_{R'}$ du théorème 6.3.1 sous l'hypothèse $v < v_{BM}$ avec $\varepsilon = \frac{v}{p}(1 + g(p-1))$, qui satisfait $[\tilde{p}]^{p^\varepsilon} \in \det(1 \otimes \Phi_{R'})$. Par construction, le module $\mathcal{U}_{R'}$ est libre de rang $r = g$, muni d'une action de $\mathcal{G}_{R'}$ et d'un endomorphisme de Frobenius $\Phi_{R'}$ Galois-équivalent. Notons que $2\varepsilon < \frac{1}{p}$; pour α fixé dans $\mathbf{Q} \cap [2\varepsilon, \frac{1}{p}]$, on note $\mathbf{V}_{R'} = \mathbf{V}_\alpha(\mathcal{U}_{R'})$ le \mathbf{Z}_p -module libre de rang g avec action continue de $\mathcal{G}_{R'}$ fourni par le théorème.

Pour tout $m \geq 1$, la représentation $\mathbf{V}_{R'}/p^m \mathbf{V}_{R'}$ de $\mathcal{G}_{R'}$ fournit un faisceau étale localement constant \mathbb{L}_m sur $\text{Spm } R'[\frac{1}{p}]$. Ces ouverts affinoïdes forment un recouvrement admissible² de

2. Plus précisément, il faut se restreindre au voisinage des variétés abéliennes A_0 sur $\overline{\mathbf{F}}_p$ telles que $\dim_{\overline{\mathbf{F}}_p} \text{Hom}(\alpha_p, A_0[p]) \leq 1$ (dont le complémentaire est de codimension supérieure à 1), et on prolonge le faisceau construit à $X(\frac{v}{p})^{\text{rig}}$ en entier en utilisant le principe de Koecher analytique, cf [BM10, Théorème 6.3 et lemme 6.4].

$X\left(\frac{v}{p}\right)^{\text{rig}}$. Pour tout morphisme $R'_1 \rightarrow R'_2$ injectif, le morphisme $\mathbf{V}_{R'_1}/p^m \mathbf{V}_{R'_1} \rightarrow \mathbf{V}_{R'_2}/p^m \mathbf{V}_{R'_2}$ est compatible au morphisme de groupes $\mathcal{G}_{R'_2} \rightarrow \mathcal{G}_{R'_1}$; par conséquent, les faisceaux $\mathbb{L}_{m,R'}$ se recollent en un faisceau étale localement constant \mathbb{L}_m . Lorsque m varie, ces faisceaux forment un système projectif pour la multiplication par p , que l'on note $\mathbb{L} = (\mathbb{L}_m)_m$.

6.5 L'application de Hodge-Tate surconvergente locale

La suite exacte courte définissant $\mathbf{V}_{R'} = \mathbf{V}_\alpha(\mathcal{U}_{R'})$ s'écrit :

$$0 \rightarrow \mathbf{V}_{R'} \rightarrow J^{[1]} \Lambda_\alpha(R') \otimes_{\tilde{A}_{\text{cris}}^\nabla(R')} \mathcal{U}_{R'} \xrightarrow{\varphi_1 \otimes \phi - v \otimes 1} \Lambda_{p\alpha}(R') \otimes_{\tilde{A}_{\text{cris}}^\nabla(R')} \mathcal{U}_{R'}$$

On note $\mathcal{A}: \Lambda_\alpha(R') \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{V}_{R'} \rightarrow J^{[1]} \Lambda_\alpha(R') \otimes_{\tilde{A}_{\text{cris}}^\nabla(R')} \mathcal{U}_{R'}$ l'extension des scalaires à $\Lambda_\alpha(R')$ de la flèche de gauche. D'après le corollaire A.2.2, en prenant $S = R'$, $\mathcal{M} = \mathcal{U}_{R'}$ et $\mathbf{V}(\Lambda_\alpha(S), \mathcal{M}) = \mathbf{V}_{R'}$ l'application obtenue en inversant p :

$$\mathcal{A}[p^{-1}]: \Lambda_\alpha(R')[p^{-1}] \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{V}_{R'} \rightarrow J^{[1]} \Lambda_\alpha(R')[p^{-1}] \otimes_{\tilde{A}_{\text{cris}}^\nabla(R')} \mathcal{U}_{R'}[p^{-1}]$$

est un isomorphisme. On a défini dans 6.2 un morphisme d'anneaux $\theta: W(\mathcal{R}') \rightarrow \widehat{\overline{R'}}$ et un isomorphisme de modules τ (cf proposition A.3.1). On voit comme dans le corollaire A.3.2 que l'isomorphisme $\mathcal{A}[p^{-1}]$ fournit un isomorphisme $\mathcal{G}_{R'}$ -équivariant $\widetilde{\text{HT}}_{R'} = (1 \otimes \tau) \circ (\theta \otimes \mathcal{A}[p^{-1}])$:

$$\widetilde{\text{HT}}_{R'}: \widehat{\overline{R'}}[p^{-1}] \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{V}_{R'} \xrightarrow{\sim} \widehat{\xi \overline{R'}}[p^{-1}] \otimes_{R'} \omega_{A_{R'}/R'}^\vee.$$

DÉFINITION 6.5.1. L'application $\widetilde{\text{HT}}_{R'}$ est appelée application de Hodge-Tate duale. Son application duale inverse, tordue par $\mathbf{Z}_p(1)$ fournit un morphisme $\text{Gal}(\widehat{\overline{R'}}/R')$ -équivariant

$$\text{HT}_{R'} = (\widetilde{\text{HT}}_{R'}^\vee)^{-1}(1): \mathbf{V}_{R'}^\vee(1) \hookrightarrow \widehat{\overline{R'}}[p^{-1}] \otimes_{R'} \omega_{A_{R'}/R'}.$$

On appelle $\text{HT}_{R'}$ application de Hodge-Tate surconvergente. Sa restriction à un ouvert ordinaire $\text{Spf}(R'') \subset \text{Spf}(R')$ coïncide avec l'application de Hodge-Tate ordinaire $T_p A^{\text{ét}} \rightarrow \widehat{\overline{R''}}^{\text{nr}} \otimes_{R''} \omega_{A/R''}$.

Notons que le morphisme $\text{HT}_{R'}$ envoie une \mathbf{Z}_p -base de $V_R^\vee(1)$ sur une base de $\widehat{\overline{R'}}[p^{-1}] \otimes_{R'} \omega_{A_{R'}/R'}$. Pour toute R' -algèbre S' contenue dans $\widehat{\overline{R'}}$, on note $S'_K = S' \otimes_W K = S'[p^{-1}]$.

6.6 L'application de Hodge-Tate surconvergente faisceautique

On a défini dans la sous-section 6.1 le site $X^{\text{rig}}(v)_{\text{fét}}$; on définit ici, de manière analogue à la section 4.3, le site $X^{\text{rig}}(v)_{\text{profét}}$.

Les objets de cette catégorie sont les morphismes $T \rightarrow U$ où U est un ouvert rigide de $X^{\text{rig}}(v)$ et $T = (T_n)_{n \geq 1}$ est un système projectif de revêtements finis étales $f_n: T_n \rightarrow U$, les flèches $g: (T \rightarrow U) \rightarrow (T' \rightarrow U')$ sont les systèmes projectifs de morphismes $g_n: T_n \rightarrow T'_n$ au-dessus d'une inclusion $U \subset U'$. Un recouvrement $(T_i \rightarrow U_i)_i$ de $T \rightarrow U$ est la donnée de morphismes $g_i = (g_{i,n}): T_i = (T_{i,n})_n \rightarrow T = (T_n)_n$ tels que $\cup_i g_{i,n}(T_{i,n}) = T_n$ pour tout n . On voit facilement qu'on obtient ainsi un site qu'on note $X^{\text{rig}}(v)_{\text{profét}}$.

Un système projectif $\mathbb{V} = (\mathbb{V}_m)$ de faisceaux localement constants sur $X^{\text{rig}}(v)_{\text{fét}}$ est dit lisse s'il existe un recouvrement de $X^{\text{rig}}(v)$ par des ouverts rigides U_i et des tours $T_i = (T_{i,n})_n$ de revêtements finis étales $T_{i,n} \rightarrow U_i$ tels que pour tout m et pour tout n assez grand, la restriction de \mathbb{V}_m à $T_{i,n,\text{fét}}$ est constant. On associe à ce système projectif un préfaisceau sur

$X^{\text{rig}}(v)_{\text{profét}}$ dont les sections sur $T \rightarrow U$ sont

$$\varprojlim_m \left(\varinjlim_n \mathbb{V}_m(T_n) \right)$$

On note encore \mathbb{V} ce préfaisceau. On vérifie aisément la propriété de recollement qui fait de \mathbb{V} un faisceau sur $X^{\text{rig}}(v)_{\text{profét}}$, appelé faisceau lisse. On dit qu'un système projectif $\mathbb{V} = (\mathbb{V}_m)$ est lisse de rang fini r sur \mathbf{Z}_p s'il existe un recouvrement $(T_i \rightarrow U_i)_i$ de $X^{\text{rig}}(v)_{\text{profét}}$ par des tours $T_i = (T_{i,n})_n$ de revêtements finis étales, et un système d'isomorphismes de faisceaux $\mathbb{V}_m \cong (\mathbf{Z}/p^m \mathbf{Z})^r$ sur $T_{i,n,\text{fét}}$ pour tout m , et pour tout n assez grand, compatibles quand m varie.

Par ailleurs, à tout faisceau cohérent \mathcal{F} sur $X^{\text{rig}}(v)$, on associe un faisceau sur $X^{\text{rig}}(v)_{\text{profét}}$ par $(U, (T_m)_m) \mapsto \left(\varinjlim_m H^0(T_m, f_m^* \mathcal{F}) \right)^\wedge$, où pour tout $m \geq 1$, $f_m: T_m \rightarrow X^{\text{rig}}(v)$ désigne l'application structurale et où le chapeau désigne la complétion p -adique. On dit que c'est le faisceau cohérent associé à \mathcal{F} .

REMARQUE 6.6.1. On verra dans la section suivante que c'est un faisceau de Banach.

Pour définir le morphisme de Hodge-Tate sur $X^{\text{rig}}(v)_{\text{profét}}$ (avec $v \in \mathbf{Q}^+$ et $v < \frac{v_{BM}}{p}$), on aurait besoin de l'énoncé suivant de pureté.

Question sur la pureté : pour $\text{Spf}(R') \subset X^{\text{rig}}(v)$ et toute R' -algèbre S' contenue dans \bar{R}' , a-t-on $\widehat{\bar{R}'_K}^{\text{Gal}(\bar{R}'/S')} = \widehat{S'_K}$?

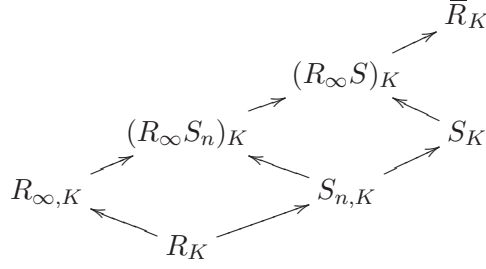
Nous ne pouvons le démontrer que pour des extensions S/R telles que $S(0) = S\{1/h\}$ soit non ramifiée sur $R(0)$. A cause de cela, nous introduisons la sous-catégorie $X^{\text{rig}}(v)_{\text{pprofét}}$ de $X^{\text{rig}}(v)_{\text{profét}}$ constituée des tours $T \rightarrow U$ telles que $T(0) \rightarrow U(0)$ soit non-ramifiée.

THÉORÈME 6.6.2. Soient $\text{Spf}(R_0) \subset X^{\text{f}}$ un ouvert affine petit (i.e. fini étale sur un tore $\text{Spf}(W\{T_1^{\pm 1}, \dots, T_d^{\pm 1}\})$, $R = R_0[p^v]\{T\}/(hT - p^v)$ et $S = \varinjlim_n S_n$ une R -algèbre telles que $\text{Spm}(S_K) \rightarrow \text{Spm}(R_K) \in X^{\text{rig}}(v)_{\text{pprofét}}$ (i.e. $S_n(0) := S_n\{\frac{1}{h}\}$ est finie étale sur $R(0) := R\{\frac{1}{h}\}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$). Alors on a

$$\widehat{\bar{R}_K}^{\text{Gal}(\bar{R}/S)} = \widehat{S_K}.$$

Démonstration. Pour $i \in \{1, \dots, d\}$, on choisit des suites $(T_i^{(n)})_{n \in \mathbf{N}}$ dans \bar{R} telles que $T_i^{(0)} = T_i$ et $(T_i^{(n+1)})^p = T_i^{(n)}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ (c'est possible car le polynôme $X^{p^n} - T_i$ a ses racines dans \bar{R} parce que T_i est inversible). On introduit une tour auxiliaire $(R_n)_{n \in \mathbf{N}}$ en posant $R_n = R[\zeta_{p^n}, T_1^{(n)}, \dots, T_d^{(n)}]$ (où ζ_{p^n} est une racine primitive p^n -ième de l'unité. On note $\widehat{R_\infty}$ le complété de $R_\infty = \varinjlim_n R_n$ pour la topologie p -adique et on pose $\widehat{R_\infty}(0) = \widehat{R_\infty} \widehat{\otimes}_R R(0) = \widehat{R_\infty}\{\frac{1}{h}\}$. Observons que les extensions $R[\zeta_{p^\infty}]_K \rightarrow R_{\infty,K}$ et $R[\zeta_{p^\infty}](0)_K \rightarrow R_\infty(0)_K$ sont galoisiennes de groupe $\Gamma = \bigoplus_{i=1}^d \gamma_i \mathbf{Z}_p$ où $\gamma_i(T_j^{(n)}) = \zeta_{p^n}^{\delta_{i,j}} T_j^{(n)}$ (où $\delta_{i,j}$ désigne le symbole de Kronecker de i et j). Cela résulte de [Sch13a, Lemma III.2.20], qui affirme que pour tout $n \in \mathbf{N}$, la $R[\zeta_{p^n}]$ -algèbre R_n est libre de base $(\underline{T}^{\underline{n}})_{\substack{\underline{n} \in \mathbf{N}^d \\ |\underline{n}| \leq p^n - 1}}$ où pour $\underline{n} = (n_1, \dots, n_d) \in \mathbf{N}^d$ on

a posé $\underline{T}^n = (T_1^{(n)})^{n_1} \cdots (T_d^{(n)})^{n_d}$ et $|\underline{n}| = \max_{1 \leq i \leq d} n_i$.



Première étape : descente presque étale. D'après [Sch12, Theorem 7.9], pour toute extension finie normale $R_\infty \rightarrow T$ contenue dans \bar{R} , l'extension $\widehat{R_\infty} \rightarrow \hat{T}$ est presque étale. Il en est donc de même de $R_\infty S_n \rightarrow \bar{R}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. On en déduit que :

$$H^0(\text{Gal}(\bar{R}/R_\infty S), \hat{\bar{R}}_K) = \widehat{R_\infty S}_K$$

On procède comme dans [Tsu10, Corollaire 4.2]. Soient $y \in \hat{\bar{R}}$ invariant par $\text{Gal}(\bar{R}/R_\infty S)$ et $m \in \mathbf{N}_{>0}$. La réduction de y modulo p^m , encore notée y , est dans une extension finie T de $R_\infty S$; il existe donc $n \in \mathbf{N}$ et une extension $T_n \subseteq \bar{R}$ finie galoisienne de $R_\infty S_n$ contenant un élément $y_{m,n}$ congru à y modulo p^m et invariant par $\text{Gal}(T_n/R_\infty S_n) = \text{Gal}(T/R_\infty S)$. D'autre part, pour tout élément $a \in \mathfrak{m}_{R_\infty}$, il existe $b_{m,n} \in T_n$ tel que $a \equiv \text{Tr}_{T_n/R_\infty S_n}(b_{m,n}) \pmod{p^m R_\infty}$ (parce que $\widehat{R_\infty} \rightarrow \hat{T}$ est presque étale). On a alors

$$\begin{aligned} ay &\equiv ay_{m,n} \pmod{p^m T_n} \\ &\equiv \text{Tr}_{T_n/R_\infty S_n}(b_{m,n})y_{m,n} \pmod{p^m T_n} \\ &\equiv \text{Tr}_{T_n/R_\infty S_n}(b_{m,n}y_{m,n}) \pmod{p^m T_n} \end{aligned}$$

de sorte que $ay \in R_\infty S_n + p^m T_n \subset R_\infty S + p^m T$ et donc $\mathfrak{m}_{R_\infty} y \in R_\infty S + p^m T$. Comme c'est vrai pour tout $m \in \mathbf{N}_{>0}$, on a $\mathfrak{m}_{R_\infty} y \in \widehat{R_\infty S}$ et donc $y \in \widehat{R_\infty S}_K$ en inversant p .

Deuxième étape : décomplétion (partie géométrique). Comme $S_{n,K}$ est étale sur R_K , le produit tensoriel $(R_\infty \otimes_R S_n)_K$ est isomorphe au produit cartésien des compositums de $R_{\infty, K}$ avec $S_{n,K}$ (indexés par les plongements dans \bar{R}). En fait, il y a un seul tel compositum. En effet, pour tout $n \in \mathbf{N}$, la $R(0)$ -algèbre $S_n(0)$ est étale (par hypothèse) alors que $R_\infty(0)$ est totalement ramifiée sur $R(0)$: ces extensions sont linéairement disjointes au-dessus de $R(0)$ et on a un isomorphisme $R_\infty \otimes_R S_n(0) \xrightarrow{\sim} R_\infty S_n(0)$. Ce dernier induit les isomorphismes :

$$R_\infty \otimes_R S_n \xrightarrow{\sim} R_\infty S_n \quad \text{et} \quad R_\infty \otimes_R S \xrightarrow{\sim} R_\infty S$$

Pour $m \in \mathbf{N}_{>0}$ on a donc la décomposition

$$R_\infty S / p^m R_\infty S = \bigoplus_{n \in \mathbf{N}} \bigoplus_{\substack{\underline{n} \in \mathbf{N}^d \\ |\underline{n}| \leq p^n - 1}} (S[\zeta_{p^\infty}] / p^m S[\zeta_{p^\infty}]) \underline{T}^n$$

Si $\gamma = \gamma_1^{z_1} \cdots \gamma_d^{z_d} \in \Gamma$ (avec $z_1, \dots, z_d \in \mathbf{Z}_p$), on a

$$(\gamma - 1)(\underline{T}^n) = c_{\underline{n}}(\gamma) \underline{T}^n$$

avec $c_{\underline{n}}(\gamma) = \zeta_{p^{n_1}}^{z_1} \cdots \zeta_{p^{n_d}}^{z_d} - 1 \in \mathbf{Z}_p$ (de sorte que la droite $(S[\zeta_{p^\infty}] / p^m S[\zeta_{p^\infty}]) \underline{T}^n$ est stable par Γ). Si $\underline{n} \neq (0, \dots, 0)$, il existe $i \in \{1, \dots, d\}$ tel que $\zeta_{p^{n_i}}^{z_i} \neq 1$, ce qui implique que $c_{\underline{n}}(\gamma) \mid \zeta_p - 1$.

Il en résulte que $(\zeta_p - 1)(R_\infty S / p^m R_\infty S)^\Gamma = (\zeta_p - 1)(S[\zeta_{p^\infty}] / p^m S[\zeta_{p^\infty}])$. En passant à la limite sur m , il vient $(\zeta_p - 1)\widehat{R_\infty S}^\Gamma = (\zeta_p - 1)\widehat{S[\zeta_{p^\infty}]}$, et donc

$$\widehat{R_\infty S_K}^\Gamma = \widehat{S[\zeta_{p^\infty}]_K}$$

en inversant p .

Troisième étape : décomplétion (partie arithmétique). L'extension $S \rightarrow S[\zeta_{p^\infty}]$ est galoisienne (là encore, cela se voit en utilisant la disjonction linéaire de $S(0)$ et $R(0)[\zeta_{p^\infty}]$ au-dessus de $R(0)$). Via le caractère cyclotomique, son groupe de Galois Γ_K s'identifie à un sous-groupe ouvert de \mathbf{Z}_p^\times . en utilisant les traces normalisées de Tate (étendues à S), on a

$$\widehat{S[\zeta_{p^\infty}]_K}^{\Gamma_K} = \widehat{S}_K$$

(cf [Tat67, §3]). Finalement, on a bien $H^0(\mathrm{Gal}(\bar{R}/S), \widehat{\bar{R}}_K) = \widehat{S}_K$. \square

On en déduit :

COROLLAIRE 6.6.3. *Il existe un morphisme de faisceaux sur le site $X^{\mathrm{rig}}(v)_{\mathrm{profét}}$:*

$$\mathrm{HT} : \mathbb{L}^\vee(1) \hookrightarrow \omega_{A/X^{\mathrm{rig}}(v)}$$

dont la restriction à tout ouvert affinoïde K -rationnel $(\mathrm{Spf} R'[\frac{1}{p}])_{\mathrm{profét}}$ défini comme dans la construction affine 6.5, est donnée par $\mathrm{HT}_{R'}$. Ce morphisme envoie les \mathbf{Z}_p -bases sur des bases du faisceau cohérent. Il prolonge l'application de Hodge-Tate faisceautique ordinaire 4.3.1. On l'appelle encore l'application de Hodge-Tate faisceautique (surconvergente).

En effet, soit $(T_n \rightarrow \mathrm{Spf}(R'[p^{-1}]))_n$ un ouvert de $X^{\mathrm{rig}}(v)_{\mathrm{profét}}$ donné par une tour de revêtements étales finis T_n de $\mathrm{Spf}(R'[p^{-1}])$; soit $S'_\infty = \bigcup_n S'_n$ la limite inductive des clôtures intégrales S'_n de R' dans les T_n ; on peut supposer que S'_∞ est contenue dans \bar{R}' . On a par définition du faisceau \mathbb{L} , resp. $\mathbb{L}^\vee(1) : \mathbf{V}_{R'}^{\mathrm{Gal}(\bar{R}'/S'_\infty)} = \mathbb{L}((\mathrm{Spf}(S'_\infty) \rightarrow \mathrm{Spf}(R'))$ et de même $(\mathbf{V}_{R'}^\vee(1))^{\mathrm{Gal}(\bar{R}'/S'_\infty)} = \mathbb{L}^\vee(1)((\mathrm{Spf}(S'_\infty) \rightarrow \mathrm{Spf}(R'))$.

En effet,

$$\begin{aligned} \mathbb{L}((\mathrm{Spf}(S'_\infty) \rightarrow \mathrm{Spf}(R'))) &= \varprojlim_m \left(\varinjlim_n (\mathbf{V}_{R'} / p^m \mathbf{V}_{R'})^{\mathrm{Gal}(\bar{R}'/S'_n)} \right) = \\ &= \varprojlim_m ((\mathbf{V}_{R'} / p^m \mathbf{V}_{R'})^{\mathrm{Gal}(\bar{R}'/S'_\infty)}) \end{aligned}$$

par finitude de $\mathbf{V}_{R'} / p^m \mathbf{V}_{R'}$; on trouve donc bien

$$\mathbb{L}((\mathrm{Spf}(S'_\infty) \rightarrow \mathrm{Spf}(R'))) = \left(\varprojlim_m \mathbf{V}_{R'} / p^m \mathbf{V}_{R'} \right)^{\mathrm{Gal}(\bar{R}'/S'_\infty)} = \mathbf{V}_{R'}^{\mathrm{Gal}(\bar{R}'/S'_\infty)}.$$

Soit \widehat{S}'_∞ la complétion p -adique de S'_∞ . Le Théorème 6.6.2 fournit donc un morphisme

$$\mathrm{HT}_{R'} : \mathbb{L}^\vee(1)((\mathrm{Spf}(S'_\infty) \rightarrow \mathrm{Spf}(R'))) \hookrightarrow \widehat{S}'_\infty[p^{-1}] \otimes_{R'} \omega_{A_{R'}/R'}.$$

Ces morphismes sont clairement compatibles aux morphismes de restriction $R' \rightarrow R''$ (et $S'_\infty \rightarrow S''_\infty$). Ils définissent donc un morphisme de faisceaux sur $X^{\mathrm{rig}}(v)_{\mathrm{profét}}$.

Pour chaque entier $m \geq 1$, notons que pour tout $m \geq 1$, le faisceau quotient $\mathbb{L}/p^m \mathbb{L}$ sur $X^{\mathrm{rig}}(v)_{\mathrm{profét}}$ coïncide avec le faisceau \mathbb{L}_m associé aux représentations galoisiennes $\mathbf{V}_{R'} / p^m \mathbf{V}_{R'}$, et on sait que \mathbb{L}_m coïncide avec $A[p^m]^\circ$ sur $X^{\mathrm{rig}}(0)$. Rappelons aussi qu'on a identifié $\mathrm{GL}_g(\mathbf{Z}_p)$ à

$M_0 = M(\mathbf{Z}_p)$ par l'isomorphisme $A \mapsto m(A)$. Cette identification doit être gardée en mémoire dans la section suivante.

6.7 Tour d'Igusa surconvergente et variétés de Siegel

DÉFINITION 6.7.1. Pour tout $n \geq 1$, on pose $T_{n,v} = T_{n,v}^{\text{rig}} = \text{Isom}_{X^{\text{rig}}(v)}(\mu_{p^n}^g, \mathbb{L}_n)$; c'est aussi le torseur des $\mathbf{Z}/p^n \mathbf{Z}$ -bases de $\mathbb{L}_n(-1)$. C'est un revêtement fini étale de $X^{\text{rig}}(v)$; c'est un torseur étale sous le groupe $\text{GL}_g(\mathbf{Z}/p^n \mathbf{Z})$ pour l'action à gauche donnée par $\gamma \cdot v = v \circ \gamma^{-1}$. Le pro-espace rigide $T_{\infty,v}^{\text{rig}}$, limite projective des $T_{n,v}^{\text{rig}}$, est un M_0 -torseur étale qui proreprésente le foncteur des bases de $\mathbb{L}(-1)$.

REMARQUE 6.7.2. Comme ρ_0 est surjective par [FC90, Chap. V], il en est de même pour ρ_v ; la tour d'Igusa surconvergente $T_{\infty,v}^{\text{rig}}$ est donc géométriquement connexe.

Par normalisation du W -schéma formel $X^f(v)$ [AG07], on peut aussi définir des modèles entiers normaux $T_{n,v}^f \rightarrow X^f(v)$; ces morphismes sont finis et plats, génériquement étales, galoisiens de groupes $M(\mathbf{Z}/p^n \mathbf{Z})$. Il est clair que les schémas formels $T_{n,v}^f$ sont connexes. On note $T_{\infty,v}^f$ la limite projective des $T_{n,v}^f$. C'est un espace topologique (limite projective des fibres spéciales des $T_{n,v}^f$), annelé, mais ce n'est pas un schéma formel (les anneaux de fonctions ne sont pas p -adiquement complets).

Contrairement à ρ_0 , la représentation ρ_v n'est probablement pas cristalline; plus précisément, avec les notations de 6.6, pour $\text{Spf}(R') \subset \text{Spf}(R) \subset X^f(v)$ non contenu dans $X^f(0)$, considérons la représentation $\mathbf{V}_{R'}$ de $\text{Gal}(\overline{R'}/R')$ associée par restriction de \mathbb{L} à $\text{Spf}(R')$. À l'aide de l'anneau de périodes $A_{\text{cris}}(R')$ défini dans [Bri08], on définit le morphisme

$$\mathbf{V}_{R'} \otimes_{\mathbf{Z}_p} A_{\text{cris}}(R') \rightarrow (\mathbf{V}_{R'} \otimes A_{\text{cris}}(R'))^{\text{Gal}(\overline{R'}/R')} \otimes_{R'} A_{\text{cris}}(R').$$

Nous pensons que ce n'est pas un isomorphisme. Cependant, rappelons qu'à la suite de travaux d'Abbès-Mokrane [AM04] et Andreatta-Gasbarri [AG07], Fargues et Tian [FT10] ont défini pour tout $p > 2$ des sous-groupes canoniques supérieurs : pour tout $n \geq 1$ et pour tout réel positif $v_n < \frac{1}{2p^n-1}$ si $p > 3$ et $v_n < \frac{1}{3^n}$ si $p = 3$, il existe un BT_n totalement isotrope $H_n \subset A[p^n]$ au-dessus de $X^{\text{rig}}(v_n)$ dont la restriction au-lieu ordinaire est canoniquement isomorphe à $A[p^n]^\circ$.

LEMME 6.7.3. Pour tout $n \geq 1$, il existe $0 < v_n < \min(\frac{1}{2p^n-1}, \frac{v_{\text{BM}}}{p})$, tel que la restriction de \mathbb{L}_n à $X^{\text{rig}}(v_n)$ est isomorphe au faisceau étale associé à H_n .

Démonstration. Soit $n \geq 1$ et $v < \min(\frac{1}{2p^n-1}, \frac{v_{\text{BM}}}{p})$ (rappelons que $p > 3$); soient H_n le sous-groupe canonique défini par Fargues et Tian sur $X(v)$ et \mathbb{L}_n le n -ième échelon du faisceau lisse surconvergent défini en 6.1.3.

D'après [Ray94, Rem. 3.4.12 (i)], on sait *a priori* que le germe du prolongement du revêtement fini étale $A[p^n]^\circ \rightarrow X^{\text{rig}}(0)$ est unique, de sorte qu'il existe $v_n > 0$ assez petit et un isomorphisme $i_n : \mathbb{L}_n \cong H_n$ au-dessus de $X^{\text{rig}}(v_n)$ (cet isomorphisme est canonique par prolongement analytique). \square

On en déduit le

COROLLAIRE 6.7.4. La restriction de la représentation \mathbb{L}_n à $X^{\text{rig}}(v_n)$ (pour v_n assez petit) est cristalline.

- REMARQUE 6.7.5. (1) Notons que la suite des rayons des tubes $X^{\text{rig}}(v_n)$ où H_n est défini tend vers 0, de sorte qu'en passant à la limite projective, la représentation \mathbb{L} elle-même n'est cristalline dans aucun voisinage strict du lieu ordinaire.
- (2) La question de savoir si cette coïncidence a lieu sur tout le domaine $X^{\text{rig}}(1/2p^{n-1})$ reste ouverte.
- (3) La question de la compatibilité de l'application de Hodge-Tate classique

$$\text{HT}_n: H_n^{\text{D}} \rightarrow \omega_{H_n/X^{\text{f}}(v_n)}$$

avec celle donnée par une hypothétique structure entière de $\mathbb{L}^{\vee}(1) \rightarrow \omega_{A/X^{\text{rig}}(v_n)}$ est ouverte, à part si $n = 1$, comme on le verra plus bas (théorème 8.2.2).

On déduit du lemme 6.7.3 un énoncé de modularité des différents crans de la tour d'Igusa surconvergente (mais pas de la tour entière) :

COROLLAIRE 6.7.6. *Pour tout $n \geq 1$ et pour v_n assez petit (et comme dans le théorème), le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} T_n^{\text{rig}} & \longrightarrow & X_U^{\text{rig}}(p^n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ X^{\text{rig}}(0) & \longrightarrow & X_Q^{\text{rig}}(p^n) \end{array}$$

se prolonge à $X^{\text{rig}}(v_n)$:

$$\begin{array}{ccc} T_{n,v_n}^{\text{rig}} & \longrightarrow & X_U^{\text{rig}}(p^n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ X^{\text{rig}}(v_n) & \longrightarrow & X_Q^{\text{rig}}(p^n) \end{array}$$

Soit $X_U^{\text{rig}}(p^n)(v_n)$ l'image inverse de $X^{\text{rig}}(v_n)$ dans $X_U^{\text{rig}}(p^n)$; l'immersion ouverte $T_{n,v_n}^{\text{rig}} \rightarrow X_U^{\text{rig}}(p^n)$ identifie T_{n,v_n}^{rig} à la composante connexe de $X_U^{\text{rig}}(p^n)(v_n)$ contenant les (A, H'_n, ψ') (avec les notations de 5.3), où le sous-groupe isotrope maximal H'_n est de type multiplicatif.

Ceci fournit une interprétation modulaire de $T_{n,v}^{\text{rig}}$ pour tout $n \geq 1$, pour $v < v_n$.

Démonstration. On observe d'abord que pour v_n assez petit, l'ensemble des composantes connexes de $X_U^{\text{rig}}(p^n)(v_n)$ est le même que celui de $X_U^{\text{rig}}(p^n)(0)$, ce qui résulte de [Poi08, Théorème 2]. Soit $X_U^{\mu}(p^n)(v_n)$ la composante connexe de $X_U^{\text{rig}}(p^n)(v_n)$ contenant la composante connexe ordinaire de type multiplicatif $X_U^{\mu}(p^n)(0)$; il s'agit de voir qu'elle coïncide avec l'image de T_{n,v_n}^{rig} . Comme le diagramme

$$\begin{array}{ccc} T_{n,v_n}^{\text{rig}} & \xrightarrow{f} & X_U^{\mu}(p^n)(v_n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ X^{\text{rig}}(v_n) & \xrightarrow{g} & X_Q^{\mu}(p^n)(v_n) \end{array}$$

est cartésien, pour voir que f est un isomorphisme, il suffit de voir que g en est un : il s'agit de vérifier que le sous-groupe canonique $H_n \subset A[p^n]$ est l'unique sous-groupe lagrangien fini et plat de $A[p^n]$ au-dessus de $X^{\text{rig}}(v_n)$ dont la restriction à $X^{\text{rig}}(0)$ est $A[p^n]^{\circ}$. Ce n'est autre que l'énoncé de [AG07, Théorème 3.5]. \square

En vue de la section suivante, on introduit le quotient $T_{N_0^+, v}^{\text{rig}} = N_0^+ \backslash T_{\infty, v}^{\text{rig}}$ et le quotient $T_{I, v}^{\text{rig}}$ de $T_{\infty, v}^{\text{rig}}$ par le sous-groupe d'Iwahori I de $\text{GL}_g(\mathbf{Z}_p)$; on a aussi $T_{I, v}^{\text{rig}} = B^+(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}) \backslash T_{1, v}^{\text{rig}}$. Notons que $T_{N_0^+, v}^{\text{rig}}$ classe les drapeaux lagrangiens complets rigidifiés de $\mathbb{L}(-1)$, c'est à dire les suites strictement croissantes $0 \subset \mathbb{M}_1 \subset \dots \subset \mathbb{M}_g = \mathbb{L}(-1)$ de sous-faisceaux lisses avec pour chaque $i = 1, \dots, g$ une \mathbf{Z}_p -base e_i de $\mathbb{M}_i / \mathbb{M}_{i-1}$. L'espace rigide $T_{I, v}^{\text{rig}}$ classe donc les drapeaux complets lagrangiens $0 \subset \mathbf{N}_1 \subset \dots \subset \mathbf{N}_g$ de $\mathbb{L}_1(-1)$ par des faisceaux localement constants tels que pour chaque $i = 1, \dots, g$, $\mathbf{N}_i / \mathbf{N}_{i-1} \cong \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ (mais l'isomorphisme n'est pas spécifié), au-dessus de $X^{\text{rig}}(v)$. Si B désigne le sous-groupe de Borel de Sp_{2g} contenant l'image de B^+ dans M , la variété de Siegel $X_B(p)_K$ classe précisément ces drapeaux complets dans les sous-groupes lagrangiens H' de $A[p]$, et l'immersion ouverte $T_{1, v}^{\text{rig}} \rightarrow X_U^{\text{rig}}(p)_K$ induit un plongement $T_{I, v}^{\text{rig}} \rightarrow X_B^{\text{rig}}(p)_K$. L'image de ce plongement est la composante connexe $X_B^\mu(p)(v)$ de $X_B^{\text{rig}}(p)(v)$ qui contient le lieu où le sous-groupe lagrangien H' est de type multiplicatif; ce plongement va jouer un rôle important dans les sections suivantes.

7. Modules des formes Igusa-surconvergentes

7.1 Faisceau des formes de Siegel classiques

Soit $f : A \rightarrow X$ la variété abélienne universelle principalement polarisée de dimension g et munie d'une structure de niveau Γ . On note encore $A \rightarrow X_B(p)$ son changement de base à $X_B(p)$. Soit $\omega = f_*\Omega_{A/X}$ le faisceau des différentielles relatives; il est localement libre de rang g . Soit $\mathcal{T} = \text{Isom}_X(\mathcal{O}_X^g, \omega)$ l'espace des bases de ω ; le morphisme $\pi : \mathcal{T} \rightarrow X$ est un GL_g -torseur pour l'action à gauche donnée par $h \cdot \tau = \tau \circ h^{-1}$ pour tout $h \in \text{GL}_g$ et tout point τ de \mathcal{T} . Notons que $\mathcal{T} \times_X X_B(p) = \text{Isom}_{X_B(p)}(\mathcal{O}_{X_B(p)}^g, \omega_{A/X_B(p)})$. Soit N^+ , resp. N^- , le sous-groupe unipotent supérieur, resp. inférieur, de GL_g . Soit $X^*(T)^+$ le cône des poids N^+ -dominants de GL_g ; il s'identifie aux g -uplets $k = (k_1, \dots, k_g) \in \mathbf{Z}^g$ tels que $k_1 \geq \dots \geq k_g$ par $k : t = \text{diag}(t_1, \dots, t_g) \mapsto t^k = t_1^{k_1} \dots t_g^{k_g}$. Le groupe GL_g agit sur $\pi_*\mathcal{O}_{\mathcal{T}}$ par $(h \cdot f)(\tau) = f(\tau \circ h^{-1})$ pour tout isomorphisme $\tau : \mathcal{O}_X^g \cong \omega$. Comme le tore T normalise N^- , il agit sur le faisceau des invariants $(\pi_*\mathcal{O}_{\mathcal{T}})^{N^-}$. Soit $k = (k_1, \dots, k_g) \in \mathbf{Z}^g$. On définit (suivant [Hid02] et [Pil12, Section 1.1 et Définition 1.4]) le faisceau localement libre ω^k des formes de Siegel classiques de poids k sur X par

$$\omega^k = (\pi_*\mathcal{O}_{\mathcal{T}})^{N^-}[-k]$$

LEMME 7.1.1. *Les sections de ω^k sont les fonctions $f(\tau)$ sur \mathcal{T} telles que $tn^- \cdot f = t^k \cdot f$ pour tout $t \in T$ et $n^- \in N^-$ et on a*

$$(\pi_*\mathcal{O}_{\mathcal{T}})^{N^-} = \bigoplus_{k \in X^*(T)} \omega^k.$$

Le changement de base de ω^k à $X_B(p)$ a une définition analogue en utilisant $\pi \times \text{Id}_{X_B(p)} : \mathcal{T} \times X_B(p) \rightarrow X_B(p)$ au lieu de π . On définit les K -espaces vectoriels $M(\Gamma; K)$, resp. $M(\Gamma_B(p), K)$, des formes modulaires de Siegel classiques de niveau Γ resp. $\Gamma_B(p)$ par

$$M(\Gamma, K) = H^0(X, (\pi_*\mathcal{O}_{\mathcal{T}})^{N^-}) = \bigoplus_{k \in X^*(T)} M^k(N; K)$$

et

$$(\Gamma_B(p), K) = H^0(X_B(p), (\pi_* \mathcal{O}_{\mathcal{T}} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{X_B(p)})^{N^-}) = \bigoplus_{k \in X^*(T)} M^k(\Gamma_B(p); K)$$

où l'on a posé $M^k(\Gamma; K) = H^0(X, \omega^k)$, resp. $M^k(\Gamma_B(p); K) = H^0(X_B(p), \omega^k)$.

7.2 Faisceaux des formes Igusa-surconvergentes

Fixons un rationnel v tel que $0 < v < \frac{v_{\text{BM}}}{p}$ et une extension finie \mathcal{K} de K , contenant un élément de valuation v , qu'on note p^v ; soit $T_{\infty, v}^f$, resp. $T_{N_0^+, v}^f$, la normalisation de $X^f(v)$ dans $T_{\infty, v}^f$, resp. dans le quotient $T_{N_0^+, v}^{\text{rig}} = N_0^+ \backslash T_{\infty, v}^{\text{rig}}$. On considère les morphismes de $\mathcal{O}_{\mathcal{K}}$ -(pro)schémas formels $\tilde{\pi}_I^f: T_{\infty, v}^f \rightarrow T_{I, v}^f$ et $\pi_I^f: T_{N_0^+, v}^f \rightarrow T_{I, v}^f$. Notons que l'action du groupe d'Iwahori I sur $T_{\infty, v}^{\text{rig}}$ donnée par $(g \cdot f)(\xi) = f(g^{-1}\xi)$ se prolonge par continuité à $T_{\infty, v}^f$, mais qu'on n'a pas nécessairement $T_{\infty, v}^f/N_0^+ = T_{N_0^+, v}^f$.

Notons que $\tilde{\pi}_I^f$ et π_I^f sont affines, de sorte que les images inverses d'un ouvert affine $\text{Spf}(R)$ de $T_{I, v}^f$ sont données par des algèbres R_{∞} et $R_{N_0^+}$, réunion d'algèbres admissibles R_n , resp. $R_{N_0^+}$, finies normales et étales hors de p au-dessus de R . Ces algèbres sont donc p -adiquement complètes, mais pas leur réunions. On forme les faisceaux d'algèbres $\mathcal{R} = \pi_{I, *}\mathcal{O}_{T_{\infty, v}^f}$ et $\mathcal{R}_{N_0^+} = \pi_{I, *}^f \mathcal{O}_{T_{N_0^+, v}^f}$ qui à un ouvert affine $\text{Spf}(R)$ associe $R_{N_0^+}$. Par EGA 0.3.2.6, on peut former les faisceaux de Zariski

$$\widehat{\mathcal{R}} = \varprojlim_m \mathcal{R}/p^m \mathcal{R}, \quad \widehat{\mathcal{R}_{N_0^+}} = \varprojlim_m \mathcal{R}_{N_0^+}/p^m \mathcal{R}_{N_0^+}$$

complétions p -adique sur $T_{I, v}^f$ de $\widehat{\mathcal{R}}$, resp. $\mathcal{R}_{N_0^+}$.

Soit $A = R[\frac{1}{p}]$ et $U = \text{Spm}(A)$ l'affinoïde de $T_{I, v}^{\text{rig}}$ associé à A ; pour tout $n \geq 1$, soit R_n , resp. $R_{N_0^+, n}$ la clôture intégrale de R dans $T_{n, v}^{\text{rig}}$ resp. $T_{N_0^+, n, v}^{\text{rig}}$, et $A_n = R_n[p^{-1}]$, la A -algèbre de Banach finie étale définissant $T_{n, v}^{\text{rig}}|_U$. Rappelons que le K -espace rigide $T_{n, v}^{\text{rig}}$ est géométriquement irréductible; le corps K est donc algébriquement clos dans A_n pour tout $n \geq 1$ et W coïncide avec sa clôture intégrale dans les anneaux R_n . On munit chaque K -algèbre A_n , resp. $A_{N_0^+, n} = A_{N_0^+}^{N_0^+}$ de la norme donnée par

$$-\log |f| = \inf \{x \in \mathbf{R}, p^x f \in R_n\}$$

Cette définition est compatible avec celle de la norme de A associée à R . Pour tout $n \geq 1$, l'algèbre A_n munie de cette norme est un espace de Banach et les injections $A_{N_0^+, n} \hookrightarrow A_{N_0^+, n+1}$ sont des isométries. Notons que le groupe des normes de $A_n \setminus \{0\}$ coïncide avec celui de K^\times . Soit A_{∞} , resp. $A_{N_0^+}$, la réunion des $A_n = R_n[\frac{1}{p}]$ resp. $A_{N_0^+, n}$.

On forme la complétion p -adique $\widehat{A_{N_0^+}}$ de l'algèbre $A_{N_0^+} = R_{N_0^+}[1/p]$ réunion des $A_{N_0^+, n} = R_{N_0^+}[1/p]$; c'est une algèbre de Banach sur A . Par le Th.6.6.2, elle coïncide avec $\widehat{A_{\infty}^{N_0^+}}$. La localisation $\widehat{\mathcal{R}_{N_0^+}}[\frac{1}{p}]$ définit un faisceau de Zariski sur l'espace rigide $T_{I, v}^{\text{rig}}$ dont les sections sur U s'identifient au A -module de Banach $\widehat{A_{\infty}^{N_0^+}}$. Plus précisément, pour tout ouvert affinoïde $U = \text{Spm} A$ de $X^{\text{rig}}(v)$ et pour tout recouvrement $(U_i)_i$ de U par des ouverts affinoïdes

$U_i = \mathbf{Spm}(A_i)$, d'intersections affinoïdes $U_i \cap U_j = \mathbf{Spm}(A_{ij})$, on a une suite exacte

$$0 \rightarrow A_{N_0^+} \rightarrow \prod_i A_{i,N_0^+} \rightarrow \prod_{i,j} A_{i,j,N_0^+}$$

par quasi-compacité, on peut supposer ces recouvrements finis ; la suite ci-dessus induit donc par complétion p -adique une suite exacte

$$0 \rightarrow \widehat{A_{N_0^+}} \rightarrow \prod_i \widehat{A_{i,N_0^+}} \rightarrow \prod_{i,j} \widehat{A_{i,j,N_0^+}}.$$

Soit N_1^- le noyau de la réduction modulo p de N_0^- . On a la décomposition d'Iwahori $I = N_1^- \times T_0 \times N_0^+$. On considère les espaces analytiques affines $(N^-)^{\text{an}} \cong (A^{\frac{g(g-1)}{2}})^{\text{an}}$ et $T^{\text{an}} \subset (A^g)^{\text{an}}$ munis de leurs normes standards, notées $||$. Pour tout couple (w, u) de nombres rationnels strictement positifs, on pose

$$N^-(w) = \{n^- \in (N^-)^{\text{an}}; (\exists n_1^- \in N_1^-) |(n_1^-)^{-1} n^- - 1| \leq p^{-w}\},$$

$$T(u) = \{t \in T^{\text{an}}; (\exists t_0 \in T_0) |t t_0^{-1} - 1| \leq p^{-u}\}.$$

Ces définitions sont compatibles avec celles de [Buz07, Chap. III, Sect.8] où ces voisinages sont notés \mathbf{B}_r , resp. \mathbf{B}_r^\times .

LEMME 7.2.1. *La multiplication à gauche par I laisse stable le sous-espace $N^-(w) \times T(u) \times (N^+)^{\text{an}}$ de $\mathbf{GL}_g^{\text{an}}$, pourvu que $w \geq u > 0$.*

Démonstration. Soit $w \geq u > 0$. Par la décomposition d'Iwahori, il suffit de vérifier l'énoncé pour N_0^+ . Soit $n_0 \in N_0^+$; il faut montrer que $n_0 \cdot n^- = \nu^- \theta \nu^+$ où $\nu^- \in N^-(w)$, $\theta \in T(u)$ et $\nu^+ \in (N^+)^{\text{an}}$. On peut supposer que $n_0 = u_\alpha(x)$, où u_α désigne le sous groupe à un paramètre associé à une racine positive α (relative au Borel supérieur de \mathbf{GL}_g), et $x \in \mathbf{Z}_p$. Dans ce cas, on suffit de prendre $n^- = u_{-\beta}(\lambda)$ pour toute racine positive β pour laquelle $-\beta + \alpha$ est encore une racine positive ou nulle, et pour un λ de la droite affine A^{an} w -proche de $p\mathbf{Z}_p$: $|\lambda - p\lambda| \leq p^{-w}$. On se ramène ainsi à un calcul dans \mathbf{SL}_2 ou \mathbf{SL}_3 .

- Dans \mathbf{SL}_2 (cas où $\beta = \alpha$), on cherche le membre de droite de :

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda' & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta & 0 \\ 0 & \theta' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où λ' , θ , θ' et μ sont tels qu'il existe $y' \in \mathbf{Z}_p$ et $t, t' \in \mathbf{Z}_p^\times$ tels que $|\lambda' - py'| \leq p^{-w}$, $|\theta t^{-1} - 1| \leq p^{-u}$, $|\theta'(t')^{-1} - 1| \leq p^{-u}$, et $\mu \in A^{\text{an}}$. On trouve $\theta = 1 + x\lambda$, $\lambda' = \lambda\theta^{-1}$ et $\theta' = 1 - \lambda'\theta\lambda$. On vérifie facilement que pour $w \geq u > 0$, $t = \frac{1}{1+px}$, $y' = y$, $t' = t^{-1}$ conviennent.

- Dans \mathbf{SL}_3 (cas où $\beta \neq \alpha$), on cherche le membre de droite de :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda' & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \mu & \mu' \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et on trouve de manière similaire que les nombres cherchés existent et sont dans les w -voisinages de $p\mathbf{Z}_p$, resp. u -voisinages de \mathbf{Z}_p^\times . □

On suppose désormais $w \geq u > 0$ et on considère $N^-(w) \times T(u)$ comme un sous-espace de $\mathbf{GL}_g^{\text{an}} / (N^+)^{\text{an}}$, sur lequel I opère par multiplication à gauche.

On définit alors le préfaisceau $\mathcal{O}_{v,w}^u$ dont les sections f sont les sections de $\widehat{\mathcal{R}_{N_0^+}[\frac{1}{p}]}$ qui sont (w, u) -analytiques, c'est-à-dire telles que l'action de I sur $\widehat{\mathcal{R}[\frac{1}{p}]}$, ou plutôt de $N_1^- \times T_0 \cong I/N_0^+$ par $n_1^- t_0 \mapsto n_1^- t_0 \cdot f$, se prolonge analytiquement au voisinage rigide quasi-compact $N^-(w) \times T(u)$ d'ordre (w, u) de $N_1^- \times T_0$ dans le \mathbf{Q}_p -espace analytique $(N^- \times T)^{\text{an}}$.

LEMME 7.2.2. *Le préfaisceau $\mathcal{O}_{v,w}^u$ est un faisceau de Zariski.*

Démonstration. Soit $U = \mathbf{Spm} A$ un ouvert affinoïde de $X^{\text{rig}}(v)$ et $(U_i)_i$ est un recouvrement de U par des ouverts affinoïdes $U_i = \mathbf{Spm}(A_i)$, les applications de restriction fournissent une application linéaire continue injective ι entre K -espaces de Banach

$$\widehat{A_{N_0^+}} \xrightarrow{\iota} \prod_i \widehat{A_{N_0^+,i}}$$

cette application est fermée et par le théorème de l'application ouverte, la norme de $\widehat{A_\infty}$ est équivalente à celle induite par celle de $\prod_i \widehat{A_{N_0^+,i}}$. Par conséquent, si $f \in \widehat{A_{N_0^+}}$ d'image $(f_i)_i \in \prod_i \widehat{A_{N_0^+,i}}$ est telle que pour tout i , $n_1^- t_0 \mapsto n_1^- t_0 \cdot f_i$ se prolonge analytiquement, il en va de même pour $n_1^- t_0 \mapsto n_1^- t_0 \cdot f$. \square

Étant donnée une algèbre affinoïde $A = \mathcal{O}_{T_{I,v}^{\text{rig}}}(U)$, soit $A_{N_0^+} = A_\infty^{N_0^+}$ et $\mathbf{A}(N^-(w) \times T(u), \widehat{A_{N_0^+}})$ l'espace des fonctions rigides analytiques à valeurs dans le Banach $\widehat{A_{N_0^+}}$. On munit le K -espace $\mathbf{A}(N^-(w) \times T(u), \widehat{A_{N_0^+}})$ de la norme

$$|\varphi|_{v,w}^u = \sup\{|\varphi(g)|_p; g \in N^-(w) \times T(u)\}$$

Cette norme confère à $\mathbf{A}(N^-(w) \times T(u), \widehat{A_{N_0^+}})$ une structure de A -module de Banach (voir [Buz07, Sect.2]). Considérons l'action de I sur $\mathbf{A}(N^-(w) \times T(u), \widehat{A_{N_0^+}})$ donnée par $(\gamma_A \cdot f)(g) = \gamma \cdot f(\gamma^{-1}g)$ pour $\gamma \in I$. Le A -module des sections de $\mathcal{O}_{v,w}^u$ sur l'affinoïde $U = \mathbf{Spm}(A)$ n'est autre que le sous-module Inv_A des invariants par I de $\mathbf{A}(N^-(w) \times T(u), \widehat{A_{N_0^+}})$. C'est un A -sous-module de Banach de $\mathbf{A}(N^-(w) \times T(u), \widehat{A_{N_0^+}})$. Notons qu'on a des structures entières naturelles sur ces espaces définies en remplaçant les séries dans $\mathbf{A}(N^-(w) \times T(u), \widehat{A_{N_0^+}})$ par des séries à coefficients dans $\widehat{R_{N_0^+}^\infty}$. On y reviendra dans la section 9. Rappelons la définition donnée dans [AIP, Appendice A].

DÉFINITION 7.2.3. Un faisceau \mathcal{F} sur un espace rigide X est dit de Banach si

- (1) pour tout ouvert affinoïde U de X , $\mathcal{F}(U)$ est un $\mathcal{O}_X(U)$ -module de Banach;
- (2) les applications de restrictions sont continues;
- (3) il existe un recouvrement affinoïde admissible $(U_i)_{i \in I}$ de X tel que pour tout ouvert affinoïde $V \subset U_i$, l'application

$$\mathcal{O}_X(V) \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_X(U_i)} \mathcal{F}(U_i) \rightarrow \mathcal{F}(V)$$

est un isomorphisme.

On a vu que la A -algèbre $\mathcal{O}_{v,w}^u(\mathbf{Spm}(A))$ s'identifie à $\text{Inv}_A \subset \mathbf{A}(N^-(w) \times T(u), \widehat{A_\infty^{N_0^+}})$.

LEMME 7.2.4. *Le faisceau $\mathcal{O}_{v,w}^u$ sur $T_{I,v}^{\text{rig}}$ est de Banach; il est muni d'une action analytique unitaire de $T(u)$.*

Démonstration. Pour tout affinoïde $U = \mathrm{Spm}(A)$ de $T_{I,v}^{\mathrm{rig}}$, la description ci-dessus de $\mathcal{O}_{v,w}^u(U)$ permet de munir cet espace d'une structure naturelle de A -algèbre de Banach. De plus, par cette description, si $A \rightarrow B$ est un morphisme de K -algèbres affinoïdes associé à une immersion ouverte $\mathrm{Spm}(B) \subset \mathrm{Spm}(A)$, on voit que pour tout $n \geq 1$, le morphisme naturel $B \otimes_A A_{N_0^+,n} \rightarrow B_{N_0^+,n}$ est un isomorphisme ; en passant à la limite inductive et en complétant, on a $B \widehat{\otimes}_A \widehat{A_{N_0^+}} \cong \widehat{B_{N_0^+}}$; il en résulte que

$$B \widehat{\otimes}_A \mathbf{A}(N^-(w) \times T(u), \widehat{A_{N_0^+}}) \cong \mathbf{A}(N^-(w) \times T(u), \widehat{B_{N_0^+}})$$

En effet, on peut réécrire les deux membres comme

$$(B \widehat{\otimes}_A \widehat{A_{N_0^+}}) \widehat{\otimes}_K \mathbf{A}(N^-(w) \times T(u), K) \cong \widehat{B_{N_0^+}} \widehat{\otimes}_K \mathbf{A}(N^-(w) \times T(u), K)$$

Comme B est topologiquement plat sur A (voir [BO78, Sect.1.7, Cor.5]), $B \widehat{\otimes}_A \mathrm{Inv}_A$ s'identifie à Inv_B par l'isomorphisme ci-dessus. Il en résulte que le morphisme de restriction

$$\mathcal{O}_{v,w}^u(\mathrm{Spm}(A)) \rightarrow \mathcal{O}_{v,w}^u(\mathrm{Spm}(B))$$

est continu et induit un isomorphisme $B \widehat{\otimes}_A \mathcal{O}_{v,w}^u(\mathrm{Spm}(A)) \rightarrow \mathcal{O}_{v,w}^u(\mathrm{Spm}(B))$. Enfin, en posant $t \cdot \varphi(g) = \varphi(t^{-1}g)$ pour tout $t \in T(u)$ et pour toute fonction $\varphi: N^-(w) \times T(u) \rightarrow \widehat{A_{\infty,v}}$, on définit bien une action analytique telle que $|t \cdot \varphi|_{v,w}^u = |\varphi|_{v,w}^u$. \square

DÉFINITION 7.2.5. Le faisceau $\mathcal{O}_{v,w}^u$ est appelé faisceau universel des formes (v, w, u) -Igusa-surconvergentes.

Pour définir le sous-faisceau universel $\mathcal{O}_{v,w,1}^u$ des formes cuspidales (v, w, u) -Igusa-surconvergentes, on va définir dans la section suivante le q -développement des sections de $\mathcal{O}_{v,w}^u$.

7.3 Compactification toroïdale et q -développement

On utilise les notations de la section 3.

Soit Π l'ensemble des classes de Γ -conjugaison de la classe de Sp_{2g} -conjugaison du parabolique de Siegel Q ; Π s'appelle l'ensemble des N -pointes (ou pointes de niveau N), c'est un ensemble fini. Soit $[P] \in \Pi$ une telle classe, soit P un représentant de $[P]$; le radical unipotent $U_P(\Gamma)$ de $P \cap \Gamma$ est un groupe abélien libre de rang $d = \frac{g(g+1)}{2}$; considérons le tore $T_P = \mathbf{G}_m \otimes U_P(\Gamma)$, de groupe des caractères $X^*(T_P)$ canoniquement isomorphe au dual $U_P(\Gamma)^*$ de $U_P(\Gamma)$ dans $U_P(\mathbf{R})$ (pour $P = Q$ et $\Gamma = \Gamma(N)$, le parabolique de Siegel, $U_P(\Gamma) = NS_g(\mathbf{Z})$ et $X^*(T_P)$ s'identifie à $\frac{1}{N}S_g^*(\mathbf{Z})$ où $S_g^*(\mathbf{Z})$ est le groupe des matrices symétriques demi-entières de diagonale entière). On a une immersion torique $T_P \hookrightarrow (T_P)_{\Sigma_P}$ obtenue par recollement des immersions torique affines $\mathrm{Spec}(W[[q^T; T \in \sigma^\vee \cap X^*(T_P)]])$, $\sigma \in \Sigma_P$. Par construction du morphisme $f: \mathcal{G} \rightarrow \overline{X}$, pour chaque pointe de représentant P , il y a un morphisme $\phi_{\Sigma_P}: (T_P)_{\Sigma_P} \rightarrow \overline{X}$ tel que le pull-back de f par ϕ_{Σ_P} s'identifie au quotient de Mumford G_P du tore \mathbf{G}_m^g par un réseau L_P libre de rang g , avec polarisation. En fait, ϕ_{Σ_P} se relève en un morphisme $\Phi_{\Sigma_P}: (T_P)_{\Sigma_P} \rightarrow \overline{T}$ puisque le pull-back $\phi_{\Sigma_P}^* \omega$ possède une base canonique. Ceci entraîne aussi que pour tout $k \in X^*(T)^+$, $\phi_{\Sigma_P}^* \omega^k$ pour tout $k \in X^*(T)^+$. Pour toute section f de ω^k , on peut écrire $\Phi_{\Sigma_P}^*(f) = \sum_T a_T q^T$, la somme portant sur les éléments semi-positifs de $U_P(\Gamma)^*$ (voir [FC90, Chap.V]). On peut donc donner une autre définition de la cuspidalité qui n'utilise pas \overline{X} . Soit $k \in X^*(T)^+$; une section f de ω^k au-dessus de X , est cuspidale si pour tout $[P] \in \Pi$, l'élément $\Phi_{\Sigma_P}^*(f) = \sum_T a_T q^T \in K((q^T; T \in U_P(\Gamma)^*))$ a tous ses coefficients a_T nuls pour les T non définis positifs, c'est à dire que T n'est pas dans $U_P(\Gamma)^{*++} = \bigcap_{\sigma \in \Sigma_P} \sigma^{\vee,+}$

où $\sigma^{\vee,+}$ désigne l'ensemble des $T \in U_P(\mathbf{R})$ tels que $\mathrm{Tr}_P(TS) > 0$ pour tout $S \in \mathrm{Int}(\sigma)$ (la trace Tr_P étant définie par transport de la trace $\mathrm{Tr}: S_g(\mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{R}$ par un isomorphisme, induit par la conjugaison : $U_P \cong (S_g, +)$). On obtient ainsi une définition de ω_k sur X équivalente à la précédente et indépendante de la compactification toroidale. Le principe du q -développement classique exprime l'injectivité pour chaque $[P] \in \Pi$ du morphisme $\Phi_{\Sigma_P}^*: H^0(\mathcal{T}, \mathcal{O}_{\mathcal{T}}) \rightarrow K((q^T))$ donc *a fortiori* de $\Phi_{\Sigma_P}^*: M^k(\Gamma; K) \rightarrow K((q^T))$ pour tout $k \in X^*(T)$. Cet énoncé est encore valable en niveau Np , à condition d'interpréter les N -pointes $[P] \in \Pi$ comme des Np -pointes non-ramifiées. Rappelons qu'une Np -pointe est dite non-ramifiée (en p) si c'est la $\Gamma_B(p)$ -classe de conjugaison d'un parabolique P qui est conjugué au parabolique de Siegel Q par une matrice γ de $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbf{Z})$ dont la réduction dans $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbf{Z}/Np\mathbf{Z}) = \mathrm{Sp}_{2g}(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z}) \times \mathrm{Sp}_{2g}(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ est de la forme $(\overline{\gamma}_N, \overline{\gamma}_p)$ avec $\overline{\gamma}_p = 1$. On peut ainsi identifier les N -pointes au sous-ensemble des Np -pointes non-ramifiées. Avec cette identification, le principe du q -développement classique en niveau Np s'énonce :

LEMME 7.3.1. *Pour chaque N -pointe $[P]$, les applications $\Phi_{\Sigma_P}^*: H^0(\mathcal{T} \times X_B(p), pr_1^* \mathcal{O}_{\mathcal{T}}) \rightarrow K((q^T))$ et, pour tout $k \in X^*(T)$, $\Phi_{\Sigma_P}^*: M^k(\Gamma_B(p); K) \rightarrow K((q^T))$ sont injectives.*

Observons que le schéma semi-abélien $G_P \rightarrow (T_P)_{\Sigma_P}$ est ordinaire ; en passant aux schémas formels obtenus par complétion p -adique, l'image de ϕ_{Σ_P} est donc contenue dans $\overline{X}^f(0)$. Ce morphisme se relève canoniquement en $\Phi_{\Sigma_P}: (T_P)_{\Sigma_P} \rightarrow \overline{T}_{\infty,0} = \mathrm{Isom}_{\overline{X}^f(0)}(\mu_{p^\infty}^g, \mathcal{G}[p^\infty]^\circ)$ puisque les quotients de Mumford G_P sont munis d'un isomorphisme canonique $\mu_{p^\infty}^g \cong G_P[p^\infty]^\circ$ qui fournit d'ailleurs une trivialisatation canonique du faisceau $\omega_{G_P/(T_P)_{\Sigma_P}}$. On définit alors le q -développement en $[P]$ d'un élément f de la complétion p -adique de $H^0(T_{\infty,v}^f, \mathcal{O}_{T_{\infty,v}})$ par $\Phi_{\Sigma_P}^*(f)$, qu'on peut voir comme une série $\sum_{T \in U_P(\Gamma)^*} a_T q^T$ la somme portant sur $U_P(\Gamma)^*$. Le critère de cuspidalité est : pour tout $[P] \in \Pi$, on a $a_T = 0$ si T n'est pas dans $U_P(\Gamma)^{*++} = \bigcap_{\sigma \in \Sigma_P} \sigma^{\vee,+}$ comme ci-dessus. La restriction

$$\phi_P: \mathrm{Spm}(\mathcal{K}((q^T))) \hookrightarrow X^{\mathrm{rig}}(v)$$

de ϕ_{Σ_P} possède un relèvement

$$\Phi_P: \mathrm{Spm}(\mathcal{K}((q^T))) \hookrightarrow T_{\infty,v}^{\mathrm{rig}}$$

donné par la base canonique de $\underline{T}_p A^\circ(-1)$ (qui coïncide avec $\mathbb{L}(-1)$ sur le lieu ordinaire). Avec les notations de 6.3, on a

REMARQUE 7.3.2. Les morphismes rigides ϕ_P et Φ_P ont des modèles entiers formels :

$$\phi_P: \mathrm{Spf}(\mathcal{O}_{\mathcal{K}}((q^T))) \hookrightarrow X^f(v)$$

et

$$\Phi_P: \mathrm{Spf}(\mathcal{O}_{\mathcal{K}}((q^T))) \hookrightarrow T_{\infty,v}^f$$

On en déduit pour chaque classe $[P] \in \Pi$ un morphisme

$$\Phi_P^*: \mathcal{R} = \pi_{I,*} \mathcal{O}_{T_{N_0^+,v}^f} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{K}}((q^T))$$

qui se prolonge par continuité aux complétions p -adiques

$$\Phi_P^*: \widehat{\mathcal{R}_{N_0^+}} \rightarrow \widehat{\mathcal{O}_{\mathcal{K}}((q^T))}$$

et donc

$$\Phi_P^*: \widehat{\mathcal{R}_{N_0^+}}[\frac{1}{p}] \rightarrow \widehat{\mathcal{O}_{\mathcal{K}}((q^T))}[\frac{1}{p}]$$

d'où

$$\Phi_P^* : \mathcal{O}_{v,w}^u \rightarrow \widehat{\mathcal{O}_{\mathcal{K}}((q^T))} \left[\frac{1}{p} \right]$$

Le principe du q -développement 7.3.3 se généralise aux formes surconvergentes :

LEMME 7.3.3. *Pour tout $[P] \in \Pi$, l'application $\Phi_P^* : \widehat{\mathcal{R}_{N_0^+}} \rightarrow \widehat{\mathcal{O}_{\mathcal{K}}((q^T))}$ est injective de conoyau sans p -torsion. En particulier $\Phi_P^* : \mathcal{O}_{v,w}^u \rightarrow \widehat{\mathcal{O}_{\mathcal{K}}((q^T))} \left[\frac{1}{p} \right]$ est injective.*

Démonstration. Il résulte comme d'habitude de ce que Φ_P est un isomorphisme entre un voisinage formel époiné de la pointe associée à $[P]$ dans le $\mathcal{O}_{\mathcal{K}}$ -schéma formel connexe $X^f(v)$, resp. $T_{I,v}$, avec la complétion p -adique de $\mathcal{O}_{\mathcal{K}}((q^T; T \in U_P(\Gamma)^* \cap \sigma^\vee))$. \square

DÉFINITION 7.3.4. Le sous-faisceau $\mathcal{O}_{v,w,!}^u$ de $\mathcal{O}_{v,w}^u$ des sections f telles que pour tout $[P] \in \Pi$, $\Phi_P^*(f) = \sum_T a_T q^T$ satisfait $a_T = 0$ à moins que $T \in U_P(\Gamma)^{++}$ est appelé faisceau des formes cuspidales (v, w, u) -surconvergentes.

LEMME 7.3.5. *Le faisceau $\mathcal{O}_{v,w,!}^u$ est un sous-faisceau de Banach de $\mathcal{O}_{v,w}^u$.*

Démonstration. Si $U = \mathrm{Spf}(A)$, on a vu que $\mathcal{O}_{v,w}^u(U)$ s'identifie au A -sous-module $\mathrm{Inv}(A)$ des I -invariants de $\mathbf{A}(N^-(w) \times T(u), \widehat{A}_\infty)$. Pour tout $[P] \in \Pi$, $\Phi_P^* : \mathbf{A}(N^-(w) \times T(u), \widehat{A}_\infty) \rightarrow \widehat{\mathcal{O}_{\mathcal{K}}((q^T))} \left[\frac{1}{p} \right]$ est continu et compatible à la restriction $A \rightarrow B$ si $V = \mathrm{Spf}(B) \subset U = \mathrm{Spf}(A)$. On procède alors comme dans la démonstration du lemme 7.2.4. \square

7.4 Modules sur l'espace des poids

Soit $\mathcal{W} = \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(T_0, \mathbf{G}_m^{\mathrm{rig}})$, le \mathbf{Q}_p -espace rigide des poids. C'est une réunion finie de copies du polydisque ouvert \mathbb{D} de dimension g , de centre 1 et de rayon 1. Si $T_0 = \Delta \times T_1$, où Δ est fini d'ordre premier à p et T_1 est pro- p , on peut identifier \mathcal{W} à $\widehat{\Delta} \times \mathbb{D}$ en fixant $\underline{u} = (1+p, \dots, 1+p)$ et en identifiant $\kappa \in \mathcal{W}$ avec $(\kappa|_\Delta, \kappa(\underline{u}))$. Le groupe abélien $X^*(T)$ des caractères algébriques de T est contenu dans \mathcal{W} . On appelle ces poids les poids classiques. Pour toute algèbre affinoïde A et pour tout caractère continu $\kappa : T_0 \rightarrow A^\times$, on sait ([Buz07, Chap. III, Prop. 8.3]) qu'il existe $u \geq 0$ telle que κ se prolonge analytiquement au voisinage $T(u)$ d'ordre u de T_0 dans T^{an} . Si $u \leq u'$, $T(u') \subset T(u)$; en posant $\mathcal{W}(u) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{an}}(T(u), \mathbf{G}_m^{\mathrm{an}})$, on a donc une réunion croissante par des ouverts rigides $\mathcal{W} = \bigcup_{u \geq 0} \mathcal{W}(u)$. Notons que les poids classiques sont dans $\mathcal{W}(0)$; ils sont même dans l'ouvert affinoïde $\mathcal{U}_{\mathrm{acc}}$ des poids accessibles :

$$\mathcal{U}_{\mathrm{acc}} = \{\kappa \in \mathcal{W}(0); |\kappa(\underline{u}) - 1| \leq p^{-1}\}.$$

Pour $u \geq 0$ fixé, on notera \mathcal{U}_u un ouvert affinoïde contenu dans $\mathcal{W}(u)$.

DÉFINITION 7.4.1. Pour toute extension finie L de K et pour tout $\kappa \in \mathcal{U}_u(L)$, on note $\mathcal{O}_{v,w}^\kappa$, resp. $\mathcal{O}_{v,w,!}^\kappa$ le sous-faisceau de $\mathcal{O}_{v,w}^u \otimes_K L$, resp. de $\mathcal{O}_{v,w,!}^u \otimes_K L$, des sections sur lesquelles $T(u)$ agit par κ^{-1} .

On définit le L -espace vectoriel $M_{v,w}^\kappa(\Gamma_B(p); L) = H^0(T_{I,v}, \mathcal{O}_{v,w}^\kappa)$, des formes Igusa surconvergentes de poids κ resp. $S_{v,w}^\kappa(\Gamma_B(p); L) = H^0(T_{I,v}, \mathcal{O}_{v,w,!}^\kappa)$.

Commentaire : On peut aussi donner une définition plus géométrique de $\mathcal{O}_{v,w,!}^\kappa$. Pour tout $\kappa \in \mathcal{U}_u(L)$, considérons le fibré rigide en droites $T_{N_0^+,v}^{\kappa,\mathrm{rig}} \rightarrow T_{B_0^+,v}^{\mathrm{rig}}$ donné par

$$T_{N_0^+,v}^{\kappa,\mathrm{rig}} = T_\infty^{\mathrm{rig}} \times^{B_0^+,\kappa} \mathbf{A}^1 \rightarrow T_{B_0^+,v}^{\mathrm{rig}},$$

où l'action de B_0^+ sur la droite affine \mathbf{A}^1 est donnée par $\kappa : (\xi \cdot t, \lambda) \sim (\xi, \kappa(t)\lambda)$. Notons que ce fibré est trivialisé par pull-back par le revêtement proétale $T_{N_0^+,v}^{\text{rig}} \rightarrow T_{B_0^+,v}^{\text{rig}}$.

Soit $\Omega_v^{\kappa,\text{rig}}$ le faisceau sur $T_{B_0^+,v}^{\text{rig}}$ des sections analytiques rigides de ce fibré. Comme $T_{N_0^+}^{\text{f}}$ est défini par normalisation, il est muni de l'action de T_0 . Les auteurs ignorent si le quotient $T_{N_0^+,v}^{\text{f}}/T_0$ est normal; on le note $T_{B_0^+,v}^{\text{f}} = T_{N_0^+,v}^{\text{f}}/T_0$; il est muni d'un morphisme fini $\pi_{B_0^+,I}^{\text{f}} : T_{B_0^+,v}^{\text{f}} \rightarrow T_{I,v}^{\text{f}}$.

Soit $\Omega_v^{\kappa,\text{f}}$ le faisceau sur $T_{B_0^+,v}^{\text{f}}$ des sections formelles du fibré en droites formel

$$T_{N_0^+,v}^{\kappa,\text{f}} = T_{\infty}^{\text{f}} \times^{B_0^+,\kappa} \mathbf{A}^{1,\text{f}} \rightarrow T_{B_0^+}^{\text{f}},$$

et soit

$$\mathcal{R}_{N_0^+}^{\kappa} = \pi_{B_0^+,I,*}^{\text{f}} \Omega_v^{\kappa,\text{f}},$$

et $\widehat{\mathcal{R}}^{\kappa}$ sa complétion p -adique. C'est un faisceau en \mathcal{O}_L -modules de Banach sur $T_{I,v}$ de sorte que $\widehat{\mathcal{R}}^{\kappa}[p^{-1}]$ est un faisceau en L -espaces de Banach. Pour tout ouvert affinoïde $\text{Spm } A$ de $T_{I,v}$, on notera $\widehat{A_{N_0^+}^{\kappa}}$ le $\widehat{A_{B_0^+}^{\kappa}}$ -module des sections sur $\text{Spm } A$ de $\widehat{\mathcal{R}_{N_0^+}^{\kappa}}[p^{-1}]$. Le faisceau $\mathcal{O}_{v,w}^{\kappa,!}$ s'identifie au sous-faisceau de $\widehat{\mathcal{R}}^{\kappa}[p^{-1}]$ des sections pour lesquelles l'action de N_1^- se prolonge analytiquement à $N^-(w)$. On peut donc identifier les sections de $\mathcal{O}_{v,w}^{\kappa,!}$ sur $\text{Spm } A$ au produit fibré d'espaces de Banach

$$\widehat{A_{N_0^+}^{\kappa}} \times_{\mathcal{C}(N_1^-, \widehat{A_{N_0^+}^{\kappa}})} \mathbf{A}(N^-(w), \widehat{A_{N_0^+}^{\kappa}})$$

pour les morphismes $f \mapsto (n_1^- \mapsto n_1^- \cdot f)$ et le morphisme de restriction de $N^-(w)$ à N_1^- .

Plus généralement, pour chaque $u > 0$, on considère sur $T_{I,v}^{\text{rig}} \times \mathcal{U}_u^{\text{rig}}$ le faisceau $\mathcal{O}_{v,w}^u \widehat{\otimes} \mathcal{O}_{\mathcal{U}_u}$ et le sous-faisceau $\mathcal{O}_{v,w}^{\kappa_u}$ (resp. $\mathcal{O}_{v,w,!}^{\kappa_u}$ pour les formes cuspidales) constitué des fonctions propres pour le caractère universel $\kappa_u : T(u) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{U}_u}^{\times}$. Par le lemme 7.2.4 ci-dessus, $\mathcal{O}_{v,w}^u$ est un faisceau de Banach; par conséquent $\mathcal{O}_{v,w}^u \widehat{\otimes} \mathcal{O}_{\mathcal{U}_u}$ est un faisceau de Banach sur $T_{I,v} \times \mathcal{U}_u$ et son sous-Module espace propre pour κ_u est également un $\mathcal{O}_{\mathcal{U}_u}$ -Module de Banach. Plus précisément, pour tout domaine affinoïde $\Omega \subset \mathcal{U}_u$ et pour tout sous-domaine affinoïde U de $T_{I,v}$, on a un isomorphisme de modules de Banach (ce sont des K -espaces vectoriels) :

$$\mathcal{O}_{v,w}^{\kappa_u}(U \times \Omega) \cong \widehat{A_{N_0^+,\Omega}^{\kappa_u}} \times_{\mathcal{C}(N_1^-, \widehat{A_{N_0^+,\Omega}^{\kappa_u}})} \mathbf{A}(N^-(w), \widehat{A_{N_0^+,\Omega}^{\kappa_u}})$$

où $\widehat{A_{N_0^+,\Omega}^{\kappa_u}} = (\widehat{A_{N_0^+}^{\kappa_u}} \widehat{\otimes}_K \mathbf{A}(\Omega, K))^{\kappa_u}$. Grâce à cette description, la propriété de faisceaux de Banach est évidente : si $\Omega' \subset \Omega \subset \mathcal{U}_u$, et si $U' \subset U \subset T_{I,v}$, l'application de restriction

$$\mathcal{O}_{v,w,!}^{\kappa_u}(U \times \Omega) \rightarrow \mathcal{O}_{v,w,!}^{\kappa_u}(U' \times \Omega')$$

est continue et induit un isomorphisme

$$\mathcal{O}(U' \times \Omega') \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}(U \times \Omega)} \mathcal{O}_{v,w,!}^{\kappa_u}(U \times \Omega) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{v,w,!}^{\kappa_u}(U' \times \Omega').$$

DÉFINITION 7.4.2. Les $\mathbf{A}(\mathcal{U}_u)$ -modules de Banach $M_{v,w}^{\kappa_u}(\Gamma_B(p)) = H^0(T_{I,v} \times \mathcal{U}_u, \mathcal{O}_{v,w}^{\kappa_u})$ et $S_{v,w}^{\kappa_u}(\Gamma_B(p)) = H^0(T_{I,v} \times \mathcal{U}_u, \mathcal{O}_{v,w,!}^{\kappa_u})$ sont appelés modules des \mathcal{U}_u -familles de formes (v, w) -Igusa-surconvergentes.

REMARQUE 7.4.3. Pour tout $\kappa \in \mathcal{U}_u$, l'évaluation $\kappa: \mathbf{A}(\mathcal{U}_u) \rightarrow L$ induit un morphisme injectif

$$(1) \quad M_{v,w}^{\kappa_u}(\Gamma_B(p)) \otimes_{\mathbf{A}(\mathcal{U}_u), \kappa} L \hookrightarrow M_{v,w}^{\kappa}(\Gamma_B(p); L) \\ \text{resp. } (2) \quad S_{v,w}^{\kappa_u}(\Gamma_B(p)) \otimes_{\mathbf{A}(\mathcal{U}_u), \kappa} L \hookrightarrow S_{v,w}^{\kappa}(\Gamma_B(p); L)$$

La question de savoir si cet homomorphisme est surjectif est délicate. On verra de deux manières que la réponse est positive pour (2), d'une part grâce aux travaux de [AIP], et d'autre part directement, dans la section 9. Mais la réponse est probablement négative pour (1).

Rappelons qu'on a $X^*(T) \subset \mathcal{U}_{\text{acc}}(K)$. En notant κ_{acc} le poids universel sur \mathcal{U}_{acc} , on a donc pour tout $k \in X^*(T)$:

$$S_{v,w}^{\kappa_{\text{acc}}}(\Gamma_B(p)) \otimes_{\mathbf{A}(\mathcal{U}_{\text{acc}}), k} K \cong S_{v,w}^k(\Gamma_B(p); K).$$

LEMME 7.4.4. Les homomorphismes $\mathbf{A}(\mathcal{U}_u)$ -linéaires $M_{v',w'}^{\kappa_u} \rightarrow M_{v'',w''}^{\kappa_u}$ et $S_{v',w'}^{\kappa_u} \rightarrow S_{v'',w''}^{\kappa_u}$ sont complètement continus.

Démonstration. On considère un recouvrement fini de $X(v')$ par des ouverts affinoïdes (U'_i) dont les intersections deux à deux sont affinoïdes ; on a

$$H^0(X(v'), \mathcal{O}_{v,w}^{\kappa_u}) = \text{Ker} \left(\bigoplus_i H^0(U'_i, \mathcal{O}_{v,w}^{\kappa_u}) \rightarrow \bigoplus_{i,j} H^0(U'_i \cap U'_j, \mathcal{O}_{v,w}^{\kappa_u}) \right)$$

Il suffit donc de montrer que pour chaque inclusion stricte d'ouverts affinoïdes $U' \subset U''$ de $X(v')$, resp. $U' \times \mathcal{U}_u$ dans $U'' \times \mathcal{U}_u$, l'application $\mathbf{A}(\mathcal{U}_u)$ -linéaire de restriction

$$H^0(U' \times \mathcal{U}_u, \mathcal{O}_{v',w'}^{\kappa_u}) \rightarrow H^0(U'' \times \mathcal{U}_u, \mathcal{O}_{v'',w''}^{\kappa_u})$$

est complètement continue. Soit $\mathbf{A}(U')_{N_0^+}$, resp. $\mathbf{A}(U'')_{N_0^+}$, la clôture intégrale de l'algèbre de Tate $\mathbf{A}(U')$, resp. $\mathbf{A}(U'')$ des fonctions rigides sur U' , resp. U'' , dans $T_{N_0^+, v'}$ resp. $T_{N_0^+, v''}$. Cette application peut s'écrire comme l'application de restriction entre K -espaces vectoriels de Banach

$$\mathbf{A} \left(N^-(w'), (\widehat{A(U')_{N_0^+}} \widehat{\otimes}_K \mathbf{A}(\mathcal{U}_u, K))^{\kappa_u} \right)^{N_1^-} \rightarrow \mathbf{A} \left(N^-(w''), (\widehat{A(U'')_{N_0^+}} \widehat{\otimes}_K \mathbf{A}(\mathcal{U}_u, K))^{\kappa_u} \right)^{N_1^-}$$

Cette application est induite par le produit tensoriel de deux applications de restriction :

$$\mathbf{A}(N^-(w'), K) \widehat{\otimes}_K (\widehat{A(U')_{N_0^+}} \widehat{\otimes}_K \mathbf{A}(\mathcal{U}_u, K))^{\kappa_u} \rightarrow \mathbf{A}(N^-(w''), K) \widehat{\otimes}_K (\widehat{A(U'')_{N_0^+}} \widehat{\otimes}_K \mathbf{A}(\mathcal{U}_u, K))^{\kappa_u}$$

Ces applications sont complètement continues, donc le produit tensoriel est complètement continu. Plus précisément, la restriction de $N^-(w')$ à $N^-(w'')$ est évidemment complètement continue. Pour voir que la seconde est également complètement continue, on observe que si h désigne un relèvement p -adique de l'invariant de Hasse, on a $A(U'') = A(U') \{ \frac{p^{v''}}{h} \}$; on a donc aussi $\widehat{A(U'')_{N_0^+}} = \widehat{A(U')_{N_0^+}} \{ \frac{p^{v''}}{h} \}$. et la restriction s'identifie à l'application $\widehat{A(U')_{N_0^+}}$ -linéaire qui envoie $\sum_n a_n (p^{v'} h^{-1})^n$ avec $a_n \in \widehat{A(U')_{N_0^+}}$, $a_n \rightarrow 0$ sur $\sum_n a_n (p^{v'} - p^{v''})^n (p^{v''} h^{-1})^n$ dont la matrice diagonale $\text{diag}((p^{v'} - p^{v''})^n)$, est sommable, de sorte que cette application est complètement continue. \square

8. Relation avec d'autres formes modulaires

8.1 Relation avec les formes modulaires classiques

Soit $\mathcal{T} \xrightarrow{\pi} X$ le GL_g -torseur des bases du faisceau localement libre $\omega = f_*\Omega_{A/X}$. Pour tout $k \in X^*(T)^+$, on a défini le faisceau ω^k sur X des formes de poids k par $\omega^k = (\pi_*\mathcal{O}_{\mathcal{T}})^{N^-}[-k]$. Le sous-faisceau ω_k des formes cuspidales est l'intersection des noyaux des Φ_P^* , $[P] \in \Pi$.

Rappelons qu'on a construit (Corollaire 6.6.3) un morphisme de faisceaux $\mathrm{HT}: \mathbb{L}^\vee(1) \rightarrow \omega_{A/T_{I,v}} \text{ sur } T_{I,v}^{\mathrm{rig}, \mathrm{profét}}$, qui, pour tout objet T de $T_{I,v}^{\mathrm{rig}, \mathrm{profét}}$, envoie une \mathbf{Z}_p -base de $\mathbb{L}^\vee(1)(T)$ sur une $\widehat{\mathcal{O}}_T$ -base de $\omega_{A/T_{I,v}} \otimes_{\mathcal{O}_{T_{I,v}}} \widehat{\mathcal{O}}_T$. Pour tout objet T de $T_{I,v}^{\mathrm{rig}, \mathrm{profét}}$ et toute base $\underline{v} = (v_1, \dots, v_g)$ de $\mathbb{L}(-1)(T)$, de base duale \underline{v}^\vee , on note $\mathrm{HTI}(\underline{v})$ la $\widehat{\mathcal{O}}_T$ -base de $\omega \otimes_{\mathcal{O}_{T_{I,v}}} \widehat{\mathcal{O}}_T$ donnée par la formule

$$\mathrm{HTI}(\underline{v}) = (\mathrm{HT}(v_1^\vee), \dots, \mathrm{HT}(v_g^\vee)).$$

Le $T_{I,v}$ -schéma $\mathcal{T}_{T_{I,v}}^{\mathrm{rig}} = \mathcal{T}^{\mathrm{rig}} \times_{X^{\mathrm{rig}}} T_{I,v}$ définit un faisceau en ensembles $\mathcal{T}_{T_{I,v}}^{\mathrm{rig}, \mathrm{profét}}$ sur $T_{I,v}^{\mathrm{rig}, \mathrm{profét}}$, qui à tout objet T de $T_{I,v}^{\mathrm{rig}, \mathrm{profét}}$ associe l'ensemble des $\widehat{\mathcal{O}}_T$ -bases de $\omega_{A/T_{I,v}} \otimes_{\mathcal{O}_{T_{I,v}}} \widehat{\mathcal{O}}_T$.

De même, le $T_{I,v}$ -prorevêtement étale $T_{\infty,v} \rightarrow T_{I,v}$ définit un faisceau en ensembles $T_{\infty,v}^{\mathrm{profét}}$ sur $T_{I,v}^{\mathrm{rig}, \mathrm{profét}}$ qui à tout objet T de $T_{I,v}^{\mathrm{rig}, \mathrm{profét}}$ associe l'ensemble des \mathbf{Z}_p -bases de $\mathbb{L}(T) = \varprojlim_m \varinjlim_n \mathbb{L}_m(T_n)$.

DÉFINITION 8.1.1. Cette application définit un morphisme de faisceaux sur $T_{I,v}^{\mathrm{rig}, \mathrm{profét}}$

$$\mathrm{HTI}: T_{\infty,v}^{\mathrm{profét}} \rightarrow \mathcal{T}_{T_{I,v}}^{\mathrm{rig}, \mathrm{profét}}$$

appelé morphisme de *Hodge-Tate-Igusa*.

Notons qu'on ne peut définir ce morphisme au niveau des schémas formels car le morphisme de faisceaux HT n'est défini qu'au-dessus de la fibre générique du schéma formel $X^f(v)$.

LEMME 8.1.2. *Pour tout $\gamma \in I$, on a $\mathrm{HTI}(\gamma.v) = {}^t\gamma^{-1} \cdot \mathrm{HTI}(v)$. En particulier, si $t_0 \in T_0 \subset I$, on a $\mathrm{HTI}(t_0.v) = t_0^{-1} \cdot \mathrm{HTI}(v)$.*

Démonstration. Une base v de $\mathbb{L}(-1)$ peut être vue comme un isomorphisme $v: \mathbf{Z}_p^g \rightarrow \mathbb{L}(-1)$ et sa base duale comme l'isomorphisme $(v^\vee)^{-1}$. Sur une base affine $\mathrm{Spf}(R)$ de $X^f(v)$, pour toute extension S de R intégralement close non ramifiée hors de p , l'application HT a été définie comme l'inverse de l'application duale de $\widehat{\mathrm{HT}}: \mathbb{L}(-1)(S) \rightarrow \omega^\vee \otimes_R \widehat{S}[\frac{1}{p}]$. On a donc

$\mathrm{HTI}(v) = \mathrm{HT}(v^\vee) = \widehat{\mathrm{HT}}^{\vee^{-1}} \circ v^{\vee^{-1}}$, de sorte que pour tout $\gamma \in I$,

$$\mathrm{HTI}(v \circ \gamma^{-1}) = \widehat{\mathrm{HT}}^{\vee^{-1}} \circ v^{\vee^{-1}} \circ {}^t\gamma = {}^t\gamma^{-1} \cdot \mathrm{HTI}(v).$$

Si $\gamma = t_0$, ${}^t\gamma^{-1} = t_0^{-1}$ d'où la deuxième formule. \square

On en déduit

PROPOSITION 8.1.3. *Pour tout poids classique $k \in X^*(T) \subset \mathcal{W}(K)$, l'application HTI induit des injections de K -espaces vectoriels $\mathrm{HTI}^*: M^k(\Gamma_B(p); K) \rightarrow M_{v,w}^k(\Gamma; K)$ et respecte la cuspidalité : $\mathrm{HTI}^*: S^k(\Gamma_B(p); K) \rightarrow S_{v,w}^k(\Gamma; K)$.*

Commentaire : On verra (section 10) que ces injections sont compatibles avec les opérateurs de Hecke hors de p ainsi qu'avec U_p .

Démonstration. Soit f une section (algébrique) de $(\pi_* \mathcal{O}_{\mathcal{T}_{X_B(p)}})^{N^-}$. On a vu que $T_{I,v}^{\text{rig}}$ s'identifie à la composante connexe $X_B^\mu(p)(v)$ de $X_B(p)^{\text{rig}}(v)$. Par restriction et analytification, on considère f comme une fonction sur $\mathcal{T}^{\text{rig}} \times_{X^{\text{rig}}(v)} T_{I,v}^{\text{rig}}$; on peut donc former $\tilde{f}(v) = f(\text{HTI}(v))$. Vérifions que \tilde{f} est une section de $\mathcal{O}_{v,w}^u$. Soit v_0 la base tautologique de $\mathbb{L}(-1)(T_{\infty,v}^{\text{rig}})$. Le Th.6.6.2 fournit un morphisme I -équivariant

$$\text{HT}: \mathbb{L}(-1)(T_{\infty,v}^{\text{rig}}) \rightarrow \omega_{A/T_{I,v}^{\text{rig}}} \otimes_{\mathcal{O}_{T_{I,v}^{\text{rig}}}} \pi_{I,*} \widehat{\mathcal{O}_{T_{\infty,v}^{\text{rig}}}}.$$

On a alors $\tilde{f} = (f \otimes 1)(v_0) \in \widehat{\mathcal{R}}[\frac{1}{p}]$. Comme f est N^- -invariante, \tilde{f} est invariante sous N_0^+ et par conséquent est une section de $\widehat{\mathcal{R}}^{N_0^+}[\frac{1}{p}] = \widehat{\mathcal{R}_{N_0^+}}[\frac{1}{p}]$, par 6.6.2.

De plus, la fonction $F: I \rightarrow \widehat{\mathcal{R}}^{N_0^+}[\frac{1}{p}]$ définie par $\gamma \mapsto (v \mapsto \tilde{f}(\gamma^{-1} \cdot v))$ se prolonge en une fonction analytique $F(h)$ sur l'ouvert analytique $N^-(w) \times T(u) \times (N^+)^{\text{an}}$ de GL_g^{an} , pour un couple (u, w) de rationnels strictement positifs, de sorte que $F(\gamma \cdot h) = \gamma \cdot F(h)$ pour tout $\gamma \in I$. Mais comme f est algébrique, on peut définir F pour tout $h \in \text{GL}_g^{\text{an}}$ par la formule $F(h)(v) = f({}^t h \cdot \text{HTI}(v))$; cette fonction est équivariante sous I par 8.1.2. Il résulte de la section 3 que les q -développements classique et surconvergent sont compatibles :

$$\Phi_{\Sigma_P}^*(f) = \Phi_P^*(\text{HTI}^*(f)) \quad (\text{Comp})$$

par le principe du q -développement surconvergent 7.3.3, on en déduit que HTI^* est injective. Enfin, toujours par le Lemme 8.1.2, on voit que si $f(t \cdot \omega) = t^k \cdot f(\omega)$, on a $\tilde{f}(t_0 \cdot v) = t_0^{-k} \cdot \tilde{f}(v)$ pour tout $t_0 \in T_0$, de sorte qu'en comparant le Lemme 7.1.1 et la Définition 7.4.1, on conclut que HTI^* préserve les poids classiques.

Si f est cuspidale, il en est de même pour $\text{HTI}^*(f)$, c'est à dire que cette forme surconvergente satisfait les conditions de cuspidalité 7.3.4. Ceci résulte de (Comp). \square

8.2 Relation avec les formes surconvergentes de poids accessibles

Dans un travail récent, Andreatta-Iovita-Pilloni [AIP] ont défini des formes de Siegel surconvergentes (et ont développé la théorie des familles pour ces formes). On va rappeler brièvement leur construction. On renvoie aux sections 4 et 5 de [AIP] pour les détails. L'ingrédient-clé est l'étude des applications de Hodge-Tate associées aux sous-groupes canoniques supérieurs.

Soit $n \geq 1$ et $v_n < \frac{1}{2p^{n-1}}$ (ou $v_n < \frac{1}{3^n}$ si $p = 3$). On fixe une extension finie \mathcal{K} de K telle que $v_n \in v(\mathcal{O}_{\mathcal{K}})$ et on note encore X^f , X^{rig} ... les schémas formels, resp. espaces rigides, changement de base de W à $\mathcal{O}_{\mathcal{K}}$, resp. de K à \mathcal{K} . Soit H_n le sous-groupe canonique défini par Fargues et Tian [FT10] sur $X^{\text{rig}}(v_n)$, et même sur le modèle formel canonique $X^f(v_n)$ (sur $\mathcal{O}_{\mathcal{K}}$), qui prolonge le groupe de type multiplicatif $A[p^n]^\circ$ sur $X^f(0)$; c'est un schéma en groupes fini et plat sur $X^f(v_n)$, étale sur $X^{\text{rig}}(v_n)$, localement libre de rang g sur $\mathbf{Z}/p^n \mathbf{Z}$; soit H_n^D son dual de Cartier. Soit $\text{HT}_{n,FT}: H_n^D \rightarrow \omega_{H_n/X^f(v_n)}$; $x \mapsto x^*\left(\frac{dT}{T}\right)$ l'application de Hodge-Tate classique (de Fargues-Tian) sur $X^f(v_n)$. Rappelons [AIP, Prop.4.2] que pour tout $w \in]0, n - v_n \cdot \frac{p^n}{p-1}] \cap v(\mathcal{O}_{\mathcal{K}})$, le morphisme de restriction $\omega_{A/X^f(v_n)} \rightarrow \omega_{H_n}$ induit un isomorphisme de faisceaux sur $X^f(v_n)$:

$$\omega_{A/X^f(v_n)} \otimes \mathcal{O}_{X^f(v_n)}/(p^w) \cong \omega_{H_n} \otimes \mathcal{O}_{X^f(v_n)}/(p^w).$$

PROPOSITION 8.2.1. ([AIP, Prop. 4.4]) *Soit $v < \frac{1}{2}$. Il existe un sous-faisceau $\mathcal{F} \subset \omega|_{X^f(v)}$ localement libre de rang g tel que pour tout $n \geq 1$ et pour tout $v_n < \frac{1}{2p^{n-1}}$ (ou $v_n < \frac{1}{3^n}$ si*

- $p = 3$),
- (i) on a $p^{\frac{v_n}{p-1}} \cdot \omega \subset \mathcal{F} \subset \omega$ sur $X^f(v_n)$;
 - (ii) pour tout $w \in]0, n - v_n \cdot \frac{p^n}{p-1}]$, il y a une application $\mathrm{HT}_{n,w}: H_n^{\mathrm{D}} \rightarrow \mathcal{F}/p^w \mathcal{F}$ induite par l'application de Hodge-Tate sur $X^f(v_n)$, qui induit un isomorphisme $\mathrm{HT}_{n,w} \otimes 1: H_n^{\mathrm{D}} \otimes \mathcal{O}_{X^f(v_n)}/(p^w) \rightarrow \mathcal{F}/p^w \mathcal{F}$.

On a vu que pour un rayon assez petit v_n , les faisceaux étales \mathbb{L}_n et H_n coïncident sur $X^{\mathrm{rig}}(v_n)$ (cf 6.7.3) ; cependant nous ne sommes parvenu à comparer les applications de Hodge-Tate de \mathbb{L}_n et H_n que pour $n = 1$. C'est cette restriction qui limitera aux poids accessibles la comparaison ci-dessous des formes surconvergentes construites par Andreatta-Iovita-Pilloni avec les nôtres.

Soit donc $0 \leq v_1 \leq \frac{v_{\mathrm{BM}}}{p}$. La question de la comparaison des applications de Hodge-Tate est locale. On se place donc sur un ouvert $\mathrm{Spf}(R') \subset X^f(v_1)$. Notons qu'on a les inclusions

$$p^{\frac{1}{p-1}} \cdot \omega_{A/R'} \subset \mathcal{F} \subset \omega_{A/R'}$$

soit $i_{\mathcal{F}}$ la première inclusion ; en passant aux R' -duaux, elle induit un morphisme

$$i_{\mathcal{F}}^{\vee}: \mathcal{F}^{\vee} \rightarrow p^{-\frac{1}{p-1}} \cdot \omega_{A/R'}^{\vee}.$$

Soit $\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}/p\mathbf{V}$ où \mathbf{V} est la représentation de $\mathcal{G}_{R'} = \mathrm{Gal}(\bar{R}'/R')$ définie dans 6.5 et soit $H_1(\bar{R}')$ la représentation de $\mathcal{G}_{R'}$ associée au sous-groupe canonique H_1 . On déduit de A.3.2 qu'on a l'application de Hodge-Tate $\mathcal{G}_{R'}$ -équivariante

$$\widetilde{\mathrm{HT}}: \mathbf{V}(-1) \rightarrow p^{-\frac{1}{p-1}} \omega_{A^{\vee}/R'} \otimes \widehat{\bar{R}}'.$$

D'autre part, pour $r = 1 - v_1$, considérons l'application duale inverse $\widetilde{\mathrm{HT}}_{1,FT}$ de

$$\mathrm{HT}_{1,r} \otimes 1: H_1^{\mathrm{D}} \otimes \mathcal{O}_{X^f(v_1)}/(p^r) \rightarrow \mathcal{F}/p^r \mathcal{F}$$

On obtient un morphisme

$$\widetilde{\mathrm{HT}}_{1,FT}: H_1(-1) \rightarrow \mathcal{F}^{\vee}/p^r \mathcal{F}^{\vee}$$

THÉORÈME 8.2.2. *Pour $v_1 < \frac{v_{\mathrm{BM}}}{p}$, on a un isomorphisme canonique $\mathbb{L}_1 \cong H_1$. De plus, pour $r = 1 - v_1$; l'isomorphisme $\mathcal{G}_{R'}$ -équivariant canonique $\mathbf{V}_1 \cong H_1(\bar{R}')$ fournit un diagramme commutatif de $\mathcal{G}_{R'}$ -modules*

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{V}(-1) & \xrightarrow{\widetilde{\mathrm{HT}}} & p^{-\frac{1}{p-1}} \omega_{A/R'}^{\vee} \otimes \widehat{\bar{R}}' \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{V}_1(-1) & \xrightarrow{\widetilde{\mathrm{HT}}_{1-\frac{2}{p}}} & p^{-\frac{1}{p-1}} \omega_{A/R'}^{\vee} \otimes (\bar{R}'/p^{1-\frac{2}{p}} \bar{R}') \\ \parallel & & \uparrow \\ H_1(-1)(\bar{R}') & \xrightarrow{\widetilde{\mathrm{HT}}_{1,FT}} & \mathcal{F}^{\vee} \otimes (\bar{R}'/p^r \bar{R}') \end{array}$$

où le carré du haut est donné par la réduction modulo $p^{1-\frac{2}{p}}$, l'identification de gauche est induite par l'isomorphisme $\mathbf{V}_1 = H_1(\bar{R}')$, et la flèche ascendante de droite est induite par $i_{\mathcal{F}}^{\vee}$.

Démonstration. Ce théorème résulte du lemme B.2.1 et de la proposition B.2.2. En effet, le lemme B.2.1 implique que $\widetilde{\mathrm{HT}}_{1-\frac{2}{p}}: \mathbf{V}_1(-1) \rightarrow \left(p^{-\frac{1}{p-1}} \cdot \omega_A^{\vee}\right)_{1-\frac{2}{p}}$ se factorise à travers $H^1(\rho_r^{\lambda})$ (et est donc en particulier entier !) La proposition B.2.2 montre alors que $H^1(\rho_r^{\lambda})^{\vee} \circ \mathrm{HT}_{1,FT} = \mathrm{Id}_{H_1^{\mathrm{D}}}$.

En étendant les scalaires à $\bar{R}'/p^r \bar{R}'$, on obtient que la restriction à \mathcal{F}_r de $(H^1(\rho_r^\lambda) \otimes \text{Id}_{\bar{R}'/p^r \bar{R}'})^\vee$ est l'inverse de $\text{HT}_{1,FT}: H_1^\mathbb{D} \otimes \bar{R}'_r \cong \mathcal{F}_r$. Ceci montre que pour tout $x \in \mathbf{V}(-1)$, $\widetilde{\text{HT}}_{1-\frac{2}{p}}(x)$ s'identifie à l'image de $\widetilde{\text{HT}}_{1,FT}(x)$ par la flèche de réduction $\bar{R}'/p^r \bar{R}' \rightarrow \bar{R}'/p^{1-\frac{2}{p}} \bar{R}'$. \square

COROLLAIRE 8.2.3. *L'application*

$$\widetilde{\text{HT}}: \mathbf{V}(-1) \rightarrow p^{-\frac{1}{p-1}} \cdot \omega_A^\vee \otimes \widehat{\bar{R}'}$$

prend ses valeurs dans $\widehat{\bar{R}'} \otimes \mathcal{F}^\vee$. Si \underline{v} est une base de $\mathbf{V}(-1)$, son image par $\widetilde{\text{HT}}$ est une base de $\widehat{\bar{R}'} \otimes \mathcal{F}^\vee$.

Démonstration. Soit $v \in \mathbf{V}(-1)$; par B.2.1 et 8.2.2, la réduction modulo $p^{1-\frac{2}{p}}$ de $\widetilde{\text{HT}}(v)$ est dans l'image de $\widehat{\bar{R}'} \otimes \mathcal{F}^\vee$, on a donc $\text{Im}(\widetilde{\text{HT}}) \subset \widehat{\bar{R}'} \otimes \mathcal{F}^\vee + p^r \cdot p^{-\frac{1}{p-1}} \widehat{\bar{R}'} \otimes \omega_A^\vee$. Comme $r - \frac{1}{p-1} > 0$ et $\omega_A^\vee \subset \mathcal{F}^\vee$, on voit que $\text{Im}(\widetilde{\text{HT}}) \subset \widehat{\bar{R}'} \otimes \mathcal{F}^\vee$. L'image d'une base \underline{v} de $\mathbf{V}(-1)$ par $\widetilde{\text{HT}}$ est donc un système de vecteurs de $\widehat{\bar{R}'} \otimes \mathcal{F}^\vee$ dont la réduction modulo p^r est image par $\widetilde{\text{HT}}_{1,FT}$ d'une base de $H_1(-1)$. C'est donc une $\bar{R}'/p^r \bar{R}'$ -base de $\mathcal{F}^\vee \otimes (\bar{R}'/p^r \bar{R}')$. Par le lemme de Nakayama topologique, $\widetilde{\text{HT}}(\underline{v})$ est donc une $\widehat{\bar{R}'}$ -base de $\mathcal{F}^\vee \otimes \widehat{\bar{R}'}$. \square

Considérons l'espace rigide $\Theta_{1,v_1} = \text{Isom}_{X^{\text{rig}}(v_1)}(\mu_p^g, H_1)$; c'est l'espace de modules des $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ -bases de $H_1(-1)$. Notons que par propriété de H_1 sur $X^f(v_1)$, tout point de Θ_{1,v_1} se prolonge canoniquement en un point de $\text{Hom}_{X^f(v_1)}(\mu_p^g, H_1)$. Si $v_1 < \frac{v_{BM}}{p}$, par le théorème 8.2.2, on a une identification canonique $\Theta_{1,v_1} = T_{1,v_1}$; donc T_{I,v_1} classe les drapeaux de $H_1(-1)$ sur $X^{\text{rig}}(v_1)$ dont les quotients successifs sont étale-isomorphes à $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$.

Soient $\mathcal{T}_{I,v_1}^f(\mathcal{F}) = \text{Isom}_{T_{I,v_1}^f}(\mathcal{O}_{T_{I,v_1}^f}^g, \mathcal{F})$ et $\mathcal{T}_{I,v_1}^f(\mathcal{F}/p^w \mathcal{F}) = \text{Isom}_{T_{I,v_1}^f}((\mathcal{O}_{T_{I,v_1}^f}/(p^w))^g, \mathcal{F}/p^w \mathcal{F})$ les schémas formels au-dessus de T_{I,v_1}^f qui représentent les bases $\underline{\omega}$ de \mathcal{F} et de $\mathcal{F}/p^w \mathcal{F}$ respectivement. Soit $\pi_{v_1,w}: \mathcal{T}_{I,v_1}^f(\mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{T}_{I,v_1}^f(\mathcal{F}/p^w \mathcal{F})$ le morphisme induit par la réduction modulo p^w . Ce morphisme est un torseur sous le sous-groupe formel $\Gamma(w)^f = N^+(w)^f T(w)^f N^-(w)^f$ de GL_g^f . On peut définir une application de Hodge-Tate-Igusa classique pour (v_1, w) :

$$\begin{aligned} \text{HTI}_{v_1,w,\text{class}}: \Theta_{1,v_1} &\rightarrow \mathcal{T}_{I,v_1}^f(\mathcal{F}/p^w \mathcal{F}) \\ \underline{v} &\mapsto \widetilde{\text{HT}}_{1,FT}(\underline{v})^\vee \end{aligned}$$

où $\widetilde{\text{HT}}_{1,FT}(\underline{v})^\vee$ désigne la base duale de la base $\widetilde{\text{HT}}_{1,FT}(\underline{v})$ de $(\mathcal{F}/p^w \mathcal{F})^\vee$.

On forme alors le schéma formel $\mathcal{T}_{I,v_1,w}^f(\mathcal{F})$ produit fibré de $\text{HTI}_{v_1,w,\text{class}}$ et $\pi_{v_1,w}$ au-dessus de $\mathcal{T}_{I,v_1}^f(\mathcal{F}/p^w \mathcal{F})$. Il représente les couples $(\underline{v}, \underline{\omega})$ où \underline{v} est une base de $H_1^\mathbb{D}$ et $\underline{\omega}$ une base de \mathcal{F} , tels que $\text{HTI}_{v_1,w,\text{class}}(\underline{v}) = \pi_{v_1,w}(\underline{\omega})$. Soit $f: \mathcal{T}_{I,v_1,w}^f(\mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{T}_{I,v_1}^f(\mathcal{F})$ la projection $(\underline{v}, \underline{\omega}) \mapsto \underline{\omega}$; Rappelons [AIP, Prop.5.2] que si $w > \frac{v_1}{p-1}$, cette projection f est un isomorphisme sur son image. En d'autres termes, pour chaque base $\underline{\omega}$ de \mathcal{F} , il existe une et une seule base \underline{v} de $H_1^\mathbb{D}$ telle que $\text{HTI}_{v_1,w}(\underline{v}) = \pi_{v_1,w}(\underline{\omega})$.

Soit $w \in]\frac{v_1}{p-1}, 1 - v_1 \frac{p}{p-1}]$ et fixons $u = w$; soit $T_0 N_0^-$ le sous-groupe compact de $B^{-,\text{an}}$, image de $T_0 N_0^+$ par l'involution $\gamma \mapsto {}^t \gamma^{-1}$. L'action de $T_0 N_0^-$ sur $\mathcal{T}^{\text{rig}}(\mathcal{F})_{v_1,w}$ donnée, pour tout couple de bases $(\underline{v}, \underline{\omega})$, par $\gamma \cdot (\underline{v}, \underline{\omega}) = ({}^t \gamma^{-1} \underline{v}, \gamma \cdot \underline{\omega})$ se prolonge au schémas en groupes formel $T(w)^f \times N^-(w)^f$, qui définit un voisinage affinoïde de $T_0 N_0^-$ dans $B^{-,\text{an}}$. En effet, si $|\nu^- - n_0^-| \leq p^{-w}$ et $|\lambda^{-1} t_0 - 1| \leq p^{-w}$, on a $\pi_{v_1,w}(\lambda \nu^- \cdot \underline{\omega}) = \pi_{v_1,w}(t_0 n_0^- \cdot \underline{\omega}) = \text{HTI}_{v_1,w}({}^t \gamma^{-1} \cdot \underline{v})$, où $\gamma = t_0 n_0^-$. On voit donc que $\lambda \nu^- \cdot \underline{\omega}$ définit bien un point de $\mathcal{T}_{v_1,w}^f(\mathcal{F})$. On s'intéresse en

fait au quotient $N^-(w) \backslash \mathcal{T}_{I,v_1,w}^f(\mathcal{F})$, noté $\mathcal{I}\mathcal{W}_w^{\circ,+}$ dans [AIP, Sect.5.3]. Il est muni de l'action à gauche du groupe T_0 qui se prolonge en une action formelle de $T(w)^f$ induite par l'action algébrique de T sur $N^- \backslash \mathcal{T}$. On note encore $\pi: \mathcal{T}_{I,v_1,w}^f(\mathcal{F}) \mapsto T_{I,v_1}^f$ la projection induite par $\mathcal{T}_I^f = \mathcal{T}^f \times_{X^f} T_{I,v_1}^f \rightarrow T_{I,v_1}^f$.

Pour tout point κ d'un l'ouvert affinoïde \mathcal{U}_w de \mathcal{W} , les faisceaux $\omega_{v,w}^{\kappa,\text{AIP}}$, resp. $\omega_{v,w,!}^{\kappa,\text{AIP}}$ des formes de Siegel (v_1, w) -surconvergentes resp. cuspidales (v_1, w) -surconvergentes, définis par Andreatta-Iovita-Pilloni [AIP, avant la Def.5.4], sont donnés par

$$\omega_{v_1,w}^{\kappa,\text{AIP}} = (\pi_* \mathcal{O}_{\mathcal{T}_{I,v_1,w}^{\text{rig}}(\mathcal{F})})^{N^-(w)}[-\kappa], \quad \text{resp. } \omega_{v_1,w,!}^{\kappa,\text{AIP}} = (\pi_* \mathcal{O}_{\mathcal{T}_{I,v_1,w}^{\text{rig}}(\mathcal{F})})^{N^-(w)}[-\kappa](-D).$$

Les sections sont des fonctions sur $\mathcal{T}^{\text{rig}}(\mathcal{F})_{v_1,w}$ telles que $f(\lambda \nu^- \cdot \underline{\omega}) = \kappa(\lambda) \cdot f(\underline{\omega})$. L'espace des formes (v_1, w) -surconvergentes de poids κ défini par Andreatta-Iovita-Pilloni [AIP, Def.5.4] est alors donné par $M_\kappa^{\text{AIP}} = H^0(X^{\text{rig}}(v), \omega_{v_1,w}^{\kappa,\text{AIP}})$, resp. $S_\kappa^{\text{AIP}} = H^0(X^{\text{rig}}(v), \omega_{v_1,w,!}^{\kappa,\text{AIP}}(-D))$.

Notons alors que par le Théorème 8.2.2 et son Corollaire 8.2.3, les applications de Hodge-Tate-Igusa HTI modulo p^w et $\text{HTI}_{v_1,w,\text{class}}$ coïncident sur $\Theta_{1,v_1} = T_{1,v_1}$. Plus précisément, HTI envoie une \mathbf{Z}_p -base \underline{v} de $\mathbb{L}(-1)$ sur une $\mathcal{O}_{T_{I,v_1}}$ -base de \mathcal{F} dont la réduction modulo p^w coïncide avec l'image par $\text{HT}_{1,w}$ de la réduction de \underline{v} modulo p . Il en résulte que l'application $\text{HTI}: T_{\infty,v} \rightarrow \mathcal{T}_I^{\text{rig}}$ définie dans la section précédente se factorise en une application $\text{HTI}_{v_1,w}: T_{\infty,v} \rightarrow \mathcal{T}_{I,v_1,w}^{\text{rig}}(\mathcal{F})$. Elle définit, pour tout poids p -adique $\kappa \in \mathcal{U}_w(L)$ (pour L une extension finie de K), des morphismes de faisceaux

$$\text{HTI}_{v_1,w}^*: \omega_{v_1,w}^{\kappa,\text{AIP}} \rightarrow \mathcal{O}_{v_1,w}^\kappa \quad \text{et} \quad \text{HTI}_{v_1,w}^*: \omega_{v_1,w,!}^{\kappa,\text{AIP}} \rightarrow \mathcal{O}_{v_1,w,!}^\kappa$$

En prenant $u = w \in]\frac{v_1}{p-1}, 1 - v_1 \frac{p}{p-1}]$, on a

THÉORÈME 8.2.4. *Pour tout $\kappa \in \mathcal{U}_w(L)$, les morphismes de faisceaux ci-dessus sont des isomorphismes.*

Démonstration. Soit $f(\underline{\omega})$ une section de $(\pi_* \mathcal{O}_{\mathcal{T}_{I,v_1,w}^{\text{rig}}(\mathcal{F})})^{N^-(w)}[-\kappa]$; posons $\tilde{f}(\underline{v}) = f(\text{HTI}(\underline{v}))$.

Pour tout affinoïde $U = \text{Spm}(A)$ de $T_{I,v}$, la fonction $F: I \rightarrow \widehat{\mathcal{R}}[\frac{1}{p}]^{N_0^+}(U)$ définie par $\gamma \mapsto (\underline{v} \mapsto \tilde{f}(\gamma^{-1} \cdot \underline{v}))$ se prolonge en une fonction analytique $F(h)$ sur l'ouvert analytique $N^-(w) \times T(w) \times (N^+)^{\text{an}}$ de GL_g^{an} , de sorte que $F(\gamma \cdot h) = \gamma \cdot F(h)$ pour tout $\gamma \in I$. Il suffit de définir ce prolongement par la formule $F(h)(\underline{v}) = f({}^t h \cdot \text{HTI}(\underline{v}))$ pour $h \in N^-(w) \times T(w) \times N^{+, \text{an}}$. Cette fonction est équivariante sous I par 8.1.2. Ceci montre que \tilde{f} est une section de $\mathcal{O}_{v_1,w}^\kappa$.

Réciproquement, soit $g(\underline{v})$ une section de $\mathcal{O}_{v_1,w}^\kappa$ et $G(h)$ le prolongement analytique de $\gamma \in I \mapsto \gamma \cdot g$ à $N^-(w) \times T(w) \times (N^+)^{\text{an}}$; pour tout point $\underline{\omega}$ de $\mathcal{T}_{I,v_1,w}^{\text{rig}}(\mathcal{F})$, il existe un unique $\underline{v}_1 \in T_{1,v_1}$ tel que $\text{HTI}_{v_1,w,\text{class}}(\underline{v}) = \pi_{v_1,w}(\underline{\omega})$. Soit $\underline{v} \in T_{\infty,v_1}$ relevant $\underline{v}_1 \in T_{1,v_1}$. Comme $\pi_{v_1,w}$ est un $\Gamma(w)$ -torseur, il existe un unique $h \in T(w)N^+(w)$ tel que $\underline{\omega} = {}^t h \cdot \underline{v}$. On définit alors une fonction f sur $\mathcal{T}_{I,v_1,w}^{\text{rig}}(\mathcal{F})$ par $f(\underline{\omega}) = g({}^t h \cdot \text{HTI}(\underline{v})) = G(h)$. C'est une fonction analytique de $\underline{\omega}$ parce que G est une fonction analytique de h ; de plus f est une section de $\omega_{v_1,w}^{\kappa,\text{AIP}}$. On a $\text{HTI}^*(f) = g$. Cela montre que HTI^* est un isomorphisme de $\omega_{v_1,w}^{\kappa,\text{AIP}}$ sur $\mathcal{O}_{v_1,w}^\kappa$; il est $T(w)$ -équivariant.

Il résulte de la section 7.3 que les q -développements des formes AIP et Igusa-surconvergentes sont compatibles, de sorte que la cuspidalité est préservée. Ceci montre l'isomorphisme entre les faisceaux de formes cuspidales surconvergentes. \square

La même démonstration s'étend pour les familles : pour $u = w$, soit $\kappa_u: \mathcal{U}_u \rightarrow \mathbf{A}(\mathcal{U}_u)^\times$ le

caractère universel associé à \mathcal{U}_u . On définit $\omega_{v_1, w, !}^{\kappa_u, \text{AIP}}$ comme le κ_u^{-1} espace propre de

$$(\pi_* \mathcal{O}_{\mathcal{T}_{I, v_1, w}^{\text{rig}}(\mathcal{F})})^{N^-(w)} \hat{\otimes} \mathbf{A}(\mathcal{U}_u),$$

et les morphismes de Hodge-Tate-Igusa en famille : $\text{HTI}_{v_1, w}^* : \omega_{v_1, w, !}^{\kappa_u, \text{AIP}} \rightarrow \mathcal{O}_{v_1, w, !}^{\kappa_u}$.

PROPOSITION 8.2.5. *Pour $u = w \in]\frac{v_1}{p-1}, 1 - v_1 \frac{p}{p-1}]$, le morphisme $\text{HTI}_{v_1, w}^* : \omega_{v_1, w, !}^{\kappa_u, \text{AIP}} \rightarrow \mathcal{O}_{v_1, w, !}^{\kappa_u}$ est un isomorphisme de faisceaux.*

Les ouverts affinoïdes \mathcal{U}_u forment un recouvrement de $\mathcal{W}(u)$. On a donc coïncidence des familles de formes surconvergentes au sens de AIP et des familles de formes Igusa-surconvergentes au-dessus de $\mathcal{W}(u)$. En particulier, puisque $\mathcal{U}_{\text{acc}} \subset \mathcal{W}(u)$, on déduit de la proposition ci-dessus le

COROLLAIRE 8.2.6. *L'isomorphisme $\text{HTI}_{v_1, w}^* : \omega_{v_1, w, !}^{\kappa_{\text{acc}}, \text{AIP}} \rightarrow \mathcal{O}_{v_1, w, !}^{\kappa_{\text{acc}}}$ induit un isomorphisme*

$$S_{v_1, w}^{\kappa_{\text{acc}}, \text{AIP}}(\Gamma_B(p)) = S_{v_1, w}^{\kappa_{\text{acc}}}(\Gamma_B(p))$$

Ceci fournit une première démonstration du théorème d'orthonormalisabilité et de contrôle :

THÉORÈME 8.2.7. *Pour tout $v_1 < \frac{v_{\text{BM}}}{p}$ et tout $w = u \in]\frac{v_1}{p-1}, 1 - v_1 \frac{p}{p-1}]$ comme ci-dessus,*

- (1) *les $\mathbf{A}(\mathcal{U}_u)$ -modules de Banach $S_{v, w}^{\kappa_u}(\Gamma_B(p)) = \text{H}^0(T_{I, v} \times \mathcal{U}_u, \mathcal{O}_{v, w, !}^{\kappa_u})$ sont projectifs;*
- (2) *pour tout $\kappa \in \mathcal{U}_u(L)$, le morphisme de spécialisation $S_{v, w}^{\kappa_u}(\Gamma_B(p)) \rightarrow S_{v, w}^{\kappa}(\Gamma_B(p))$ est surjectif.*

Démonstration. Ceci résulte de [AIP, corollaires 8.2.3.1 et 8.2.3.3]. □

Dans la section suivante on va donner une démonstration directe de ce théorème pour $w \geq u$ et $v < \frac{1}{2p}$ quelconques, suivant les idées de l'appendice A de [AIP]. Notons que le théorème de classicité démontré par Pilloni-Stroh [PS] reste indispensable pour obtenir dans une famille des spécialisations classiques en tout poids arithmétique grand par rapport à la pente. On peut même supposer ces spécialisations classiques de niveau premier à p pour des poids très réguliers.

9. Image directe et théorème de contrôle

9.1 Tour d'Igusa surconvergente compactifiée

Considérons le morphisme propre

$$\Pi : \bar{X} \rightarrow X^*$$

de W -schémas entre la compactification toroïdale fixée et la compactification minimale arithmétiques. Par définition de la hauteur de Hodge en terme de l'invariant de Hasse, il induit un morphisme $\Pi : \bar{X}^{\text{rig}}(v) \rightarrow X^{*, \text{rig}}(v)$. On peut définir un modèle formel d'Andreatta-Gasbarri $X^{*, \text{f}}(v)$ sur \mathcal{O}_K de $X^{*, \text{rig}}(v)$ en recollant les éclatements $\text{Spf}(R_0^*\{X\}/(hX - p^v))$ pour un recouvrement affine $(\text{Spf}(R_0^*))_{R_0^*}$ de X^* . Le morphisme $\Pi^{\text{f}} : \bar{X}^{\text{f}} \rightarrow X^{*, \text{f}}$ fournit par changement de base un morphisme propre au-dessus des modèles formels $\Pi^{\text{f}} : \bar{X}^{\text{f}}(v) \rightarrow X^{*, \text{f}}(v)$ dont les cartes locales ont été décrites par [AIP, Prop.8.7]. Rappelons cette description.

Les strates de $X^{*, \text{f}}(v)$ sont les éclatements d'Andreatta-Gasbarri $Y_P^{\text{f}}(v)$ des variétés de Siegel Y_P associées à la classe $[P]$ modulo Γ d'un sous-groupe parabolique propre maximal

rationnel P (cf. Section 3). Soit $A_P \rightarrow Y_P$ la variété abélienne principalement polarisée avec structure de niveau N universelle de genre r au-dessus de Y_P . Soit L_P le réseau de rang $g - r$ quotient de \mathbf{Z}^g tel que $\text{Sym}^2 L_P = U'_P(\mathbf{Z})$; soit $T_P = L_P \otimes \mathbb{G}_m \cong \mathbb{G}_m^{g-r}$ et $E_P = N \cdot U'_P(\mathbf{Z}) \otimes \mathbb{G}_m$. Décrivons la normalisation $\bar{X}^f(v)$ de $X^{*,f}(v)$ dans $\bar{X}^{\text{rig}}(v)$. Le diviseur à l'infini $D^f(v) = \bar{X}^f(v) \setminus X^f(v)$ est muni d'une première stratification par les images inverses $D_P^f(v)$ des $Y_P^f(v)$, mais aussi d'une autre plus fine.

Soit $\Xi_P \rightarrow \mathcal{B}_P$ le E_P -torseur des 1-motifs polarisés au-dessus de $\mathcal{B}_P = \text{Ext}_{Y_P}^1(T_P, A_P) = \text{Hom}(L_P, A_P) \cong A_P^{g-r}$. Soit $\mathcal{B}_P^f(v) = \mathcal{B}_P \times_{Y_P^f} Y_P^f(v)$. Pour tout cône $\tau \in \Sigma_P$, on forme les immersions toroïdales relatives $\Xi_{P,\tau}(v) = \Xi_{P,\tau} \times_{Y_P^f} Y_P^f(v)$; elles se recollent en une immersion toroïdale $\Xi_{P,\Sigma_P}(v) \rightarrow \mathcal{B}_P^f(v) : \Xi_{P,\Sigma_P}(v) = \bigcup_{\sigma \in \Sigma_P} \Xi_{P,\tau}(v)$.

Soit $\mathring{\Sigma}_P$ l'ensemble des cônes de Σ_P contenus dans le sous-ensemble \mathring{C}_P de C_P des matrices de $U'_P(\mathbf{R})$ qui sont P -définies positives. Pour chaque cône polyédral $\sigma \in \mathring{\Sigma}_P$, soit $Z_{P,\sigma}(v)$ la strate fermée de $\Xi_{P,\sigma}(v)$; ces strates se recollent pour former la strate fermée $Z_{P,\Sigma_P}(v)$ de $\Xi_{P,\Sigma_P}(v)$. La complétion $\widehat{\Xi}_{P,\Sigma_P}(v)$ de $\Xi_{P,\Sigma_P}(v)$ le long de $Z_{P,\Sigma_P}(v)$. Le couple $(\Xi_{P,\Sigma_P}(v), Z_{P,\Sigma_P}(v))$ est muni d'une action propre et libre du groupe discret $\Gamma_{P,\ell}$; il en est donc de même pour $\widehat{\Xi}_{P,\Sigma_P}(v)$. Soit $\Gamma_{P,\sigma}$ le stabilisateur du cône σ dans $\Gamma_{P,\ell}$. C'est un groupe fini, donc trivial si Γ est sans torsion. Il y a une stratification de $D_P^f(v)$ en $D_{P,\sigma}^f(v)$ pour $\sigma \in \mathring{\Sigma}_P$ et des isomorphismes de schémas formels $\phi_{P,\sigma}$ pour tout $\sigma \in \mathring{\Sigma}_P$ de

$$\phi_{P,\sigma} : \widehat{\Xi}_{P,\sigma}(v) / \Gamma_{P,\sigma} \rightarrow \widehat{\bar{X}^f(v)}_{D_{P,\sigma}^f(v)}$$

où $\widehat{\bar{X}^f(v)}_{D_{P,\sigma}^f(v)}$ désigne la complétion de $\bar{X}^f(v)$ le long de $D_{P,\sigma}^f(v)$; ces isomorphismes se recollent en un isomorphisme de schémas formels

$$\phi_{P,\Sigma_P} : \widehat{\Xi}_{P,\Sigma_P}(v) / \Gamma_{P,\ell} \rightarrow \widehat{\bar{X}^f(v)}_{D_P^f(v)}$$

Par définition, sur $\Xi_{P,\Sigma_P}(v) / \Gamma_{P,\ell}$, l'extension de Raynaud universelle $0 \rightarrow T_P \rightarrow \tilde{G}_P \rightarrow A_P \rightarrow 0$ est polarisée, et sur la complétion $\widehat{\Xi}_{P,\Sigma_P}(v) / \Gamma_{P,\ell}$, la construction de Mumford lui associe un schéma semi-abélien G_P . C'est le pull-back d'un schéma semi-abélien $\mathcal{G} \rightarrow \bar{X}^f(v)$ associé à la décomposition Γ -admissible Σ .

Pour $P \in \mathbf{II}$, soit \mathbb{L}_P le faisceau de monodromie surconvergente sur la variété de Siegel Y_P^{rig} de genre r .

PROPOSITION 9.1.1. *Il existe un unique prolongement (encore noté \mathbb{L}) à $\bar{X}^{\text{rig}}(v)$ du faisceau de monodromie surconvergente \mathbb{L} sur $X^{\text{rig}}(v)$ tel que pour tout P , $\phi_{P,\Sigma_P}^* \mathbb{L}$ soit donné par la classe de l'extension de \mathbb{L}_P par $T_p(T_P)$ qui coïncide sur le lieu ordinaire avec la classe universelle sur Ξ_{P,Σ_P} (qui donne l'extension de Raynaud universelle $0 \rightarrow T_P \rightarrow G_P \rightarrow A_P \rightarrow 0$). De plus, pour tout $n \geq 1$ et pour tout rationnel $v_n < \frac{v}{2p^n - 1}$, la restriction de $\mathbb{L}_n = \mathbb{L} / p^n \mathbb{L}$ à $\bar{X}^{\text{rig}}(v_n)$ coïncide avec le sous-groupe canonique H_n .*

Démonstration. (1) Existence et unicité du prolongement de \mathbb{L} .

On définit \mathbb{L} sur le lieu ordinaire de $\bar{X}^{\text{rig}}(v)$ par $\underline{T}_p \mathcal{G}$ et par la construction de Brinon-Mokrane sur $X^{\text{rig}}(v)$. Ces deux définitions coïncident sur l'intersection donc fournissent \mathbb{L} sur la réunion, dont le complémentaire est de codimension au moins 2. Par la pureté rigide ([BM10, Lemme 6.4]), il en résulte que le prolongement existe et est unique.

(2) Restriction de \mathbb{L} au-dessus des strates Y_P^{rig} .

Soit S un W -schéma formel admissible et $0 \rightarrow \mathbf{G}_m^s \rightarrow G \rightarrow A \rightarrow 0$ un schéma semi-abélien extension globale de A par \mathbf{G}_m^s sur S . Sa hauteur de Hodge en un point x de S est définie comme celle de A_x ; on suppose $\text{Hdg}(x) < \frac{v_{BM}}{p}$ pour tout $x \in S$. On se donne un Frobenius surconvergent ϕ sur S ; Le groupe p -divisible $G[p^\infty]$ admet un cristal de Dieudonné (contravariant) \mathbb{D}_G^* sur S ([Mes72]), qui est un cristal surconvergent de Hodge sur S . Par la construction de [BM10], on associe à ce cristal surconvergent un faisceau \mathbb{L}_G sur S proétale sur $S[p^{-1}]$. On a une suite exacte de cristaux de Dieudonné contravariants $0 \rightarrow \mathbb{D}_A^* \rightarrow \mathbb{D}_G^* \rightarrow \mathbb{D}_T^* \rightarrow 0$. Le cristal \mathbb{D}_T^* est ordinaire de pente 1, de sorte que le cristal presque unité associé est nul. Les faisceaux de monodromie surconvergente sur S , proétales sur $S[p^{-1}]$ satisfont donc $\mathbb{L}_G = \mathbb{L}_A$. On applique ceci aux W -schémas $\Xi_{P,\Sigma_P}(v)^f$ au-dessus des strates $Y_P(v)^f$ de $X^{*,f}(v)$. On obtient donc l'égalité $\mathbb{L}_{G_P} = \mathbb{L}_P$ où \mathbb{L}_P désigne le faisceau de monodromie surconvergente pour la variété abélienne universelle $A_P \rightarrow Y_P(v)$.

Il reste à voir qu'on a une suite exacte

$$0 \rightarrow \mathbb{T}_p T_P \rightarrow \phi_P^* \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{L}_P \rightarrow 0$$

où $\mathbb{T}_p(T_P)$ désigne le module de Tate du tore T_P de rang $g - r$ associé à P et que la classe d'extension ainsi définie a pour restriction au lieu ordinaire la classe dans $\text{Ext}(A_P, T_P)$ donnée par l'extension de Raynaud $0 \rightarrow T_P \rightarrow G_P \rightarrow A_P$.

Par pureté il suffit de le vérifier sur l'ouvert U^{rig} associé au schéma formel $U = U^{\text{ord}} \cup U^{\text{fin}}$ où $U^{\text{ord}} = \Xi_{P,\Sigma_P}^{\text{f,ord}}$ et $U^{\text{fin}} = \Xi_P^{\text{f}}(v)$. Le complémentaire de $U \times k$ est de codimension au moins 2. On utilise pour cela l'appendice C. Par C.3.1, on a sur U un morphisme surjectif de log F -cristaux

$$\mathcal{H}_{\log \text{cris}}^1 \left((\tilde{\Xi}_{P,\tilde{\Sigma}_P}/L_P)|_{U/U} \right) \xrightarrow{\pi_P^*} \rightarrow \mathbb{D}_{\text{cris}}^*(G_P/U)$$

avec un noyau de pente 0. Sur U^{fin} , on applique la construction (fonctorielle) de [BM10, Th.4.28] à ces cristaux. On obtient une suite exacte de cristaux quasi-unités. Le faisceau de monodromie surconvergente associé au cristal $\text{Hom}(L_P, \mathcal{O}_{\Xi_{P,\Sigma_P}, \text{cris}})$ qui est de pente 0 n'est autre que $\mathbb{T}_p T_P(-1)$. Celui associé à $\phi_P^* \mathcal{H}_{\text{cris}}^1(A/X^{\text{f}}(v))$, restreint à $U^{\text{fin,rig}}$, est $\phi_P^* \mathbb{L}(-1)|_{U^{\text{fin,rig}}}$. Par ce qui précède, celui associé à $\mathbb{D}_{G_P}^*$ est $\mathbb{L}_{A_P}(-1)|_{U^{\text{fin,rig}}}$. Par fonctorialité de la construction, on trouve la suite exacte sur $U^{\text{fin,rig}}$ qu'on cherchait :

$$0 \rightarrow \mathbb{T}_p T_P \rightarrow \phi_P^* \mathbb{L}|_{U^{\text{fin,rig}}} \rightarrow \mathbb{L}_{A_P}|_{U^{\text{fin,rig}}} \rightarrow 0 \quad (*)$$

Sur U^{ord} , on a $\phi_P^* \mathbb{L} = \mathbb{T}_p G_P^\circ(-1)$, qui est donné par l'extension

$$0 \rightarrow \mathbb{T}_p T_P \rightarrow \mathbb{T}_p G_P^\circ \rightarrow \mathbb{T}_p A_P^\circ \rightarrow 0,$$

qu'on peut réécrire par définition comme une suite exacte

$$0 \rightarrow \mathbb{T}_p T_P \rightarrow \phi_P^* \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{L}_P \rightarrow 0$$

Il reste à voir que ces deux suites coïncident sur $U^{\text{ord,rig}} \cap U^{\text{fin,rig}}$. La suite exacte

$$0 \rightarrow \mathbb{T}_p T_P \rightarrow \phi_P^* \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{L}_P \rightarrow 0$$

sera alors définie sur U^{rig} , et se prolongera à $\Xi_{P,\Sigma_P}^{\text{f}}$ par pureté par [BM10, Lemme 6.4].

Il suffit de voir que la suite exacte $(*)$ sur $U^{\text{fin,rig}}$, restreinte à $U^{\text{fin,rig}} \cap U^{\text{ord,rig}}$, est donnée par la classe de l'extension $0 \rightarrow T_P \rightarrow G_P \rightarrow A_P \rightarrow 0$. Plus précisément, on va montrer qu'elle est déterminée par l'image de cette classe par le morphisme

$$\text{Ext}(A_P, T_P) \rightarrow \text{Ext}^\mu(\mathbb{T}_p A_P^\circ, \mathbb{T}_p T_P^\circ)$$

à valeurs dans le groupe des extensions dans la catégorie de « faisceaux lisses proétales de type multiplicatif » sur $U^{\text{rig,ord}}$ (c'est à dire pour nous, la catégorie des modules de Tate des groupes p -divisibles de type multiplicatif).

Sur le schéma formel $U^{\text{fin,f}}$, la correspondance de Katz inverse K^{-1} établit une équivalence de catégories entre les cristaux unités et les faisceaux lisses proétales. Le foncteur de Brinon-Mokrane $\mathcal{U} \mapsto \mathbb{L}(-1)$ de la catégorie des cristaux presque unités sur l'espace rigide $U^{\text{fin,rig}}$ vers la catégorie des faisceaux lisses proétales sur S^{rig} coïncide avec $K^{-1}[p^{-1}]$ sur la sous-catégorie des cristaux unités. Sur $U^{\text{rig,ord}}$, la suite $(*)$ tordue par (-1) est donc l'image par la correspondance $K^{-1}[p^{-1}]$ de la suite exacte

$$0 \rightarrow L_P^* \otimes \mathcal{O}_{U^{\text{fin,ord}}, \text{cris}} \rightarrow H_{\text{cris}}^1(A/U^{\text{fin,ord}})^{h=0} \xrightarrow{\pi^* \circ \pi_P^*} H_{\text{cris}}^1(A_P/U^{\text{fin,ord}})^{h=0} \rightarrow 0 \quad (**)$$

Les classes d'extension définies par $(*)$ et $(**)$ sont donc les mêmes.

Par [FC90, VI. Th.1.1.(iii)], on a $\omega_{\bar{A}/U}(\text{dlog})^\vee = \text{Lie}(G_P/U)$. On sait que sur $U^{\text{fin,ord}}$, on a un scindage

$$H_{\text{cris}}^1(A/U^{\text{fin,ord}}) = H_{\text{cris}}^1(\bar{A}/U^{\text{fin,ord}})^{h=0} \oplus \text{Fil}^1 H_{\text{cris}}^1(\bar{A}/U^{\text{fin,ord}})$$

de sorte qu'on a un diagramme commutatif dont les flèches verticales sont des isomorphismes :

$$\begin{array}{ccc} H_{\text{cris}}^1(A/U^{\text{fin,ord}})^{h=0} & \xrightarrow{\pi^* \circ \pi_P^*} & H_{\text{cris}}^1(A_P/U^{\text{fin,ord}})^{h=0} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Lie}(G_P/U^{\text{fin,ord}}) & \xrightarrow{\pi^*} & \text{Lie}(A_P/U^{\text{fin,ord}}) \end{array}$$

Sur la catégorie des groupes p -divisibles de type multiplicatif, le foncteur $G \mapsto \text{Lie}(G)$ est une équivalence de catégories. En effet, pour un groupe p -divisible G de type multiplicatif, l'extension vectorielle universelle G^\sharp s'identifie à G , de sorte que le module de Dieudonné (co-variant) $\mathbb{D}(G)$ s'identifie à $\text{Lie}(G)$. Par conséquent, la différentiation induit une injection de groupes $\text{Ext}^\mu(\underline{\mathbb{T}}_p A_P^\circ, \underline{\mathbb{T}}_p T_P^\circ) \hookrightarrow \text{Ext}(\text{Lie}(A_P), \text{Lie}(T_P))$. Par cette injection, la classe de l'extension $(**)$ a pour image l'image de l'extension de Raynaud. On voit donc que ces deux éléments de $\text{Ext}^\mu(\underline{\mathbb{T}}_p A_P^\circ, \underline{\mathbb{T}}_p T_P^\circ)$ ont même image dans $\text{Ext}(\text{Lie}(A_P), \text{Lie}(T_P))$, ils sont donc égaux. Ceci démontre que la suite $(*)$ est bien donnée sur le lieu ordinaire par l'extension de Raynaud universelle. \square

Soit $Q \in \Pi_0$ un conjugué rationnel du parabolique de Siegel; il correspond au choix d'un lagrangien L_Q de \mathbf{Z}^{2g} ; soit $[Q]$ sa classe de Γ -conjugaison (*i.e.* une pointe de X^* , dans le langage classique). On lui associe une tour d'Igusa compactifiée $(\bar{T}_{n,v}^{[Q],\text{rig}})_n$ définie comme suit :

$$\bar{T}_{n,v}^{[Q],\text{rig}} = \text{Isom}_{\bar{X}^{\text{rig}}(v)}(T_Q[p^n], \mathbb{L}_n) \quad \text{pour tout } n \geq 1.$$

Désormais, pour alléger les notations, on omet la référence au choix de $[Q]$, et on note $\bar{T}_{n,v}^{\text{rig}}$ cet espace; mais il est bon de la garder en mémoire. Par conjugaison, on se ramène au cas $Q = P_0$, et on se permettra donc de noter $\bar{T}_{n,v}^{\text{rig}} = \text{Isom}_{\bar{X}^{\text{rig}}(v)}(\mu_{p^n}^g, \mathbb{L}_n)$. L'identification $Q = P_0$ fixe aussi un Borel standard du Levi standard de Q et donc un sous groupe d'Iwahori $I = N_1^- T_0 N_0^+$.

On note $\bar{T}_{I,v}^{\text{rig}}$ le quotient de $\bar{T}_{1,v}^{\text{rig}}$ par $B(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$, et $\pi_I^{\text{rig}}: \bar{T}_{N_0^+,v}^{\text{rig}} = \bar{T}_{\infty,v}^{\text{rig}}/N_0^+ \rightarrow \bar{T}_{I,v}^{\text{rig}}$. Ce sont des espaces connexes. On définit les modèles entiers $\bar{T}_{I,v}^{\text{f}}$, $\bar{T}_{N_0^+,n,v}^{\text{f}}$, $\bar{T}_{N_0^+,v}^{\text{f}}$, comme les normalisations de $\bar{X}^{\text{f}}(v)$ dans $\bar{T}_{I,v}^{\text{rig}}$, $\bar{T}_{N_0^+,n,v}^{\text{rig}}$, resp. $\bar{T}_{N_0^+,v}^{\text{rig}}$.

9.2 Formes surconvergentes entières et réduction modulo p^m

On a un modèle entier $\pi_I^f : \overline{T}_{N_0^+,v}^f \rightarrow \overline{T}_{I,v}^f$, ce qui fournit un faisceau $\pi_{I,*}^f \widehat{\mathcal{O}_{\overline{T}_{N_0^+,v}^f}}$ sur le schéma formel $\overline{T}_{I,v}^f$. On peut alors définir un sous-faisceau $\mathcal{O}_{v,w,!}^{u,f}$ de ce faisceau.

Soit N l'entier tel que $N-1 < w \leq N$, et soit $N^-(w)^f$ le W -schéma formel associé à la réunion finie des δ -polydisques fermés $N^-(w, \underline{x})$ de rayon p^{-w} de centre $\underline{x} = (x_1, \dots, x_\delta)$ avec $\delta = \frac{g(g-1)}{2}$ et où chaque x_i parcourt un système de représentants de $p\mathbf{Z}_p/p^{N+1}\mathbf{Z}_p$; de même, soit M l'entier tel que $M-1 < u \leq M$ soit $T(u)^f$ le schéma formel associé à la réunion finie des g -polydisques fermés $T(w, \underline{y})$ de rayon p^{-u} de centre $\underline{y} = \text{diag}(y_1, \dots, y_g)$ où chaque y_i parcourt un système de représentants de $1 + p\mathbf{Z}_p/(1 + p^{M+1}\mathbf{Z}_p)$. On considère le modèle entier $\mathbf{A}(N^-(w)^f \times T(u)^f, \widehat{R_\infty})$ de $\mathbf{A}(N^-(w) \times T(u), \widehat{R_\infty}[p^{-1}])$ consistant à prendre des séries à coefficients dans $\widehat{R_\infty}$ (et tendant vers 0). On forme alors le faisceau

$$\mathcal{O}_{v,w,!}^{u,f} = \pi_{I,*}^f \widehat{\mathcal{O}_{\overline{T}_{N_0^+,v}^f}} \cap \mathbf{A}(N^-(w)^f \times T(u)^f, \widehat{\pi_{I,*}^f \mathcal{O}_{\overline{T}_{\infty,v}^f}})$$

Notons que le conoyau de $\mathcal{O}_{v,w,!}^{u,f} \rightarrow \pi_{I,*}^f \widehat{\mathcal{O}_{\overline{T}_{\infty,v}^f}}$ est sans p -torsion. Pour tout $\kappa \in \mathcal{U}_u(L)$, on définit comme dans 7.4 le faisceau $\mathcal{R}_{N_0^+}^\kappa = \pi_{B_0^+,I,*}^f \Omega_v^{\kappa,f}$ sur $\overline{T}_{I,v}^f$.

On introduit de même $\widehat{\mathcal{R}_{N_0^+}^{\kappa_u}}$ sur $\overline{T}_{I,v}^f \times \mathcal{U}_u^f$. Pour cela, on forme le faisceau $\Omega_v^{\kappa_u}$ des sections rigides du fibré en droites $(\overline{T}_\infty^{\text{rig}} \times \mathcal{U}_u^{\text{rig}})^{B_0^+} \times \mathbf{A}^1$ au-dessus de $\overline{T}_{B_0^+}^{\text{rig}} \times \mathcal{U}_u^{\text{rig}}$; la relation d'équivalence étant donnée par $((\xi \cdot t_0, \kappa), \lambda) \sim ((\xi, \kappa), \kappa(t_0)\lambda)$, où l'on peut réécrire $\kappa(t_0)$ comme $\kappa_u(t_0)(\kappa)$. On considère le schéma quotient $\overline{T}_{B_0^+,v}^f = \overline{T}_{N_0^+,v}^f/T_0$; notons que, comme dans 9.5, nous ne savons pas s'il coïncide avec le normalisé de $\overline{T}_{I,v}^f$ dans $\overline{T}_{B_0^+,v}^{\text{rig}}$. Il est muni d'un morphisme fini $\pi_{B_0^+}^f : \overline{T}_{B_0^+,v}^f \rightarrow \overline{T}_{I,v}^f$. On définit un modèle entier $\Omega_v^{\kappa_u,f}$ sur $\overline{T}_{B_0^+,v}^f \times \mathcal{U}_u^f$ de $\Omega_v^{\kappa_u}$ comme le faisceau des sections formelles du fibré en droite

$$\overline{T}_{N_0^+,v}^{\kappa_u,f} = (\overline{T}_{N_0^+,v}^f \times \mathcal{U}_u^f)^{T_0} \times \mathbf{A}^{1,f}$$

On peut aussi l'écrire comme $\Omega_v^{\kappa_u,f} = \left(\mathcal{O}_{\overline{T}_{\infty,v}^f \times \mathcal{U}_u^f} \right) \cap \Omega_v^{\kappa_u}$.

On pose alors

$$\mathcal{R}_{N_0^+}^{\kappa_u} = (\pi_{B_0^+}^f \times Id_{\mathcal{U}_u^f})_* \Omega_v^{\kappa_u,f}$$

On définit alors le faisceau $\mathcal{O}_{v,w,!}^{\kappa,f}$ sur $\overline{T}_{I,v}^f$, resp. $\mathcal{O}_{v,w,!}^{\kappa_u,f}$ sur $\overline{T}_{I,v}^f \times \mathcal{U}_u^f$ comme le produit fibré de faisceaux

$$\mathcal{O}_{v,w,!}^{\kappa,f} = \widehat{\mathcal{R}_{N_0^+}^\kappa}(-D) \times_{\mathcal{C}(N_1^-, \widehat{\mathcal{R}_{N_0^+}^\kappa})} \mathbf{A}(N^-(w)^f, \widehat{\mathcal{R}_{N_0^+}^\kappa})$$

resp.

$$\mathcal{O}_{v,w,!}^{\kappa_u,f} = \widehat{\mathcal{R}_{N_0^+}^{\kappa_u}}(-D) \times_{\mathcal{C}(N_1^-, \widehat{\mathcal{R}_{N_0^+}^{\kappa_u}})} \mathbf{A}(N^-(w)^f, \widehat{\mathcal{R}_{N_0^+}^{\kappa_u}}).$$

Pour tout sous-schéma formel affine $\text{Spf } R \subset \overline{T}_{I,v}^f$, on a

$$\mathcal{O}_{v,w,!}^{\kappa,f}(\text{Spf } R) = \widehat{R_{N_0^+}^\kappa}(-D) \times \mathbf{A}(N^-(w)^f, \widehat{R_{N_0^+}^\kappa}(-D))^{N_1^-}$$

resp. pour tout sous-schéma formel affine $\mathrm{Spf}(R \widehat{\otimes}_W S) \subset T_{I,v}^f \times \mathcal{U}_u^f$

$$\mathcal{O}_{v,w,!}^{\kappa_u,f}(\mathrm{Spf}(R \otimes S)) = \widehat{R_{N_0^+,S}^{\kappa_u}}(-D) \times_{\mathcal{C}(N_1^-, \widehat{R_{N_0^+,S}^{\kappa_u}})} \mathbf{A}(N^-(w)^f, \widehat{R_{N_0^+,S}^{\kappa_u}})$$

où $R_{N_0^+,S} = R_{N_0^+} \widehat{\otimes}_W S$.

Notons que le faisceau $\mathcal{O}_{v,w,!}^{\kappa_u,f}$ sur le schéma formel $\overline{T}_{I,v}^f \times \mathcal{U}_u^f$ est le κ_u -sous-espace propre pour l'action de T_0 sur $\mathcal{O}_{v,w,!}^{u,f} \widehat{\otimes}_W \mathcal{O}_{\mathcal{U}_u^f}$. Encore une fois, le conoyau de $\mathcal{O}_{v,w,!}^{\kappa_u,f} \rightarrow \mathcal{O}_{v,w,!}^{u,f} \widehat{\otimes}_W \mathcal{O}_{\mathcal{U}_u^f}$ est sans p -torsion.

Pour chaque $m \geq 1$, on note $N^-(w)_m$ le schéma affine réduction modulo p^m de $N^-(w)^f$.

La réduction $\mathcal{O}_{v,w,!}^\kappa = \mathcal{O}_{v,w,!}^{\kappa,f}/p^m \mathcal{O}_{v,w,!}^{u,f}$ modulo p^m s'écrit alors

$$\mathcal{O}_{v,w,!}^\kappa(\mathrm{Spec}(R/p^m R)) = (R_{N_0^+}^\kappa/p^m R_{N_0^+}^\kappa)(-D_m) \times_{\mathcal{C}(N_1^-, R_{N_0^+}^\kappa/p^m R_{N_0^+}^\kappa)} \mathcal{O}_{N^-(w)_m} \otimes R_{N_0^+}^\kappa/p^m R_{N_0^+}^\kappa$$

Soit $\kappa_m: T_0 \rightarrow (\mathcal{O}_{\mathbf{C}_p}/p^m \mathcal{O}_{\mathbf{C}_p})^\times$; il n'est pas difficile de montrer que pour chaque m il existe un entier n_m tel que pour tout $n \geq n_m$ le caractère κ_m se factorise à travers le quotient $T_0 \rightarrow T(\mathbf{Z}/p^n \mathbf{Z})$. Le plus petit tel n_m sera noté $\mathrm{Cond}(\kappa_m)$. Soit $N_{n,0}^+ = N^+(\mathbf{Z}/p^n \mathbf{Z})$; le module $\mathcal{O}_{v,w,!}^\kappa(\mathrm{Spec}(R/p^m R))$ peut s'écrire comme la réunion pour $n \geq \mathrm{cond}(\kappa_m)$ des

$$\mathcal{O}_{v,w,!}^\kappa(\mathrm{Spec}(R/p^m R)) = (R_{N_{n,0}^+}^\kappa/p^m R_{N_{n,0}^+}^\kappa)(-D_{n,m}) \times_{\mathcal{C}(N_1^-, R_n/p^m R_n)} \mathcal{O}_{N^-(w)_m} \otimes R_n/p^m R_n$$

Pour m fixé, considérons la fonction $\mathcal{U}_u \rightarrow \mathbf{N}$ donnée par $\kappa \mapsto \mathrm{Cond}(\kappa_m)$. Cette fonction est localement constante sur l'affinoïde \mathcal{U}_u de sorte qu'elle présente un maximum, noté $\mathrm{Cond}(\kappa_{u,m})$. Soit $\mathcal{U}_{u,m}$ la réduction modulo p^m du schéma formel affine \mathcal{U}_u^f . Si $n \geq \mathrm{Cond}(\kappa_{u,m})$, le caractère $\kappa_{u,m}: T_0 \rightarrow H^0(\mathcal{U}_{u,m}, \mathcal{O}_{\mathcal{U}_{u,m}})^\times$ se factorise à travers le quotient $T_0 \rightarrow T(\mathbf{Z}/p^n \mathbf{Z})$.

DÉFINITION 9.2.1. Soit $\mathcal{O}_{v,w,m,!}^{\kappa_u}$ la réduction modulo p^m de $\mathcal{O}_{v,w,!}^{\kappa_u,f}$; et soient $\mathcal{O}_{v,w,n,m,!}^{\kappa_{u,m}}$ (pour $n = 1, \dots$) les faisceaux cohérents donnés sur $\mathrm{Spec}(R/p^m R \otimes S/p^m S)$ par le produit fibré de modules

$$(R_{N_{0,n}^+,S,n}^{\kappa_u}/p^m R_{N_{0,n}^+,S,n}^{\kappa_u})(-D_{n,m}) \times_{\mathcal{C}(N_1^-, R_n/p^m R_n \otimes S/p^m S)} \mathcal{O}_{N^-(w)_m} \otimes R_n/p^m R_n \otimes S/p^m S.$$

On voit que le faisceau $\mathcal{O}_{v,w,m,!}^{\kappa_u}$ est réunion croissante des $\mathcal{O}_{v,w,n,m,!}^{\kappa_{u,m}}$.

Considérons le morphisme propre de K -espaces rigides $\Pi_I: \overline{X}_B(p)^{\mathrm{rig}} \rightarrow X_B(p)^{*,\mathrm{rig}}$ de compactification toroïdale fixée vers la compactification minimale de niveau iwahorique. On peut définir $\overline{X}_B(p)^{\mathrm{rig}}(v)$, $X_B(p)^{*,\mathrm{rig}}(v)$ en termes de la hauteur de Hodge, et la restriction de Π_I à $\overline{X}_B(p)^{\mathrm{rig}}(v)$ applique cet ouvert dans $X_B(p)^{*,\mathrm{rig}}(v)$.

LEMME 9.2.2. Pour v assez petit fixé, l'espace $\overline{T}_{I,v}^{\mathrm{rig}}$ s'identifie à la composante connexe contenant le lieu où le sous-groupe lagrangien H' est de type multiplicatif, dans la compactification toroïdale $\overline{X}_B(p)^{\mathrm{rig}}$.

En effet, le diagramme du corollaire 6.7.6 se prolonge aux compactifications toroïdales :

$$\begin{array}{ccc} \overline{T}_{1,v}^{\mathrm{rig}} & \longrightarrow & \overline{X}_U^{\mathrm{rig}}(p) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \overline{X}^{\mathrm{rig}}(v) & \longrightarrow & \overline{X}_Q^{\mathrm{rig}}(p) \end{array}$$

Ceci résulte de la propriété "presque universelle" du schéma semi-abélien sur $\overline{X}_Q(p)^{\text{rig}}$ (voir [FC90, II.6.10 Cor.3]) et de la Prop.9.1.1, puis on divise le morphisme $\overline{T}_{1,v}^{\text{rig}} \rightarrow \overline{X}_U^{\text{rig}}(p)$ par $B_{\text{GL}}(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}) = (B_{\text{Sp}}/U)(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$, ce qui donne le morphisme $\overline{T}_{I,v}^{\text{rig}} \rightarrow \overline{X}_B^{\text{rig}}(p)$ de l'énoncé.

Soit alors $T_{I,v}^*$ l'image de $\overline{T}_{I,v}^{\text{rig}}$ par Π_I . On définit alors $T_{I,v}^{*,f}$ comme la normalisation de $X^{*,f}(v)$ dans $T_{I,v}^*$. Elle est munie d'un morphisme fini $T_{I,v}^{*,f} \rightarrow X^{*,f}(v)$ et d'un morphisme $\Pi_I^f: \overline{T}_{I,v}^f \rightarrow T_{I,v}^{*,f}$ compatible avec le morphisme $\Pi^f: \overline{X}^f(v) \rightarrow X^{*,f}(v)$.

Pour tout $m \geq 1$, notons $\Pi_{I,m}$ la réduction modulo p^m de $\Pi_I^f: \overline{T}_{I,v}^f \rightarrow T_{I,v}^{*,f}$. Le but du reste de la section 9 est de montrer le

THÉORÈME 9.2.3. (1) *Changement de base : pour tout couple d'entiers (ℓ, m) tel que $1 \leq \ell \leq m$, on note $i_{\ell,m}: T_{I,v,\ell}^{*,f} \hookrightarrow T_{I,v,m}^{*,f}$ l'immersion fermée associée à (ℓ, m) . On a*

$$i_{\ell,m}^*(\Pi_{I,m} \times 1)_* \mathcal{O}_{v,w,m,!}^{\kappa_u} = (\Pi_{I,\ell} \times 1)_* \mathcal{O}_{v,w,\ell,!}^{\kappa_u}$$

(2) *Acyclicité : pour tout $m \geq 1$ et pour tout $i > 0$, on a*

$$R^i \Pi_{I,m,*} \mathcal{O}_{v,w,m,!}^{\kappa} = 0 \quad \text{et} \quad R^i (\Pi_{I,m} \times \text{Id}_{\mathcal{U}_{u,m}})_* \mathcal{O}_{v,w,m,!}^{\kappa_u} = 0$$

9.3 Restriction de Π_I^f aux strates du bord

On va décrire la restriction de Π_I^f au bord de ces "modèles entiers des compactifications dans la direction de l'infini" (et pas dans la direction de non-ordinarité). Le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \overline{T}_{I,v}^{\text{rig}} & \xrightarrow{\Pi_I} & T_{I,v}^{*,\text{rig}} \\ \pi_{I,\emptyset} \downarrow & & \downarrow \pi_{I,\emptyset}^* \\ \overline{X}^{\text{rig}}(v) & \xrightarrow{\Pi} & X^{*,\text{rig}}(v) \end{array}$$

induit sur les modèles entiers le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \overline{T}_{I,v}^f & \xrightarrow{\Pi_I^f} & T_{I,v}^{*,f} \\ \pi_{I,\emptyset}^f \downarrow & & \downarrow \pi_{I,\emptyset}^{*,f} \\ \overline{X}^f(v) & \xrightarrow{\Pi^f} & X^{*,f}(v) \end{array}$$

Rappelons que nous avons fixé une classe $[Q]$ de paraboliqes de Siegel ; soit $Q \in [Q]$; on note $\mathbf{\Pi}_{[Q]}$, resp. $\mathbf{\Pi}_Q$, l'ensemble des paraboliqes contenant le radical unipotent d'un élément de $[Q]$, resp. de Q . Pour $\Gamma_Q = \Gamma \cap Q$, on a $\mathbf{\Pi}_{[Q]}/\Gamma = \mathbf{\Pi}_Q/\Gamma_Q$; en effet, tout $P \in \mathbf{\Pi}_{[Q]}$ possède un Γ -conjugué qui contient le radical unipotent U_Q de Q . Soit $P \in \mathbf{\Pi}_Q$; le sous-espace isotrope L_P stable par P est contenu dans le lagrangien L_Q stable par Q et on a une décomposition canonique $L_Q = L_{P,\ell} \oplus L_{P,h}$, d'où une décomposition canonique du tore T_Q associé à L_Q en $T_{P,\ell} \times T_{P,h}$. Rappelons que pour simplifier les notations, nous avons pris $Q = P_0$. On a donc une décomposition du tore standard $\mathbf{G}_m^g = T_{P,\ell} \times T_{P,h}$, resp. du groupe multiplicatif $\mu_{p^s}^g = T_{P,\ell}[p^s] \times T_{P,h}[p^s]$. Considérons la strate $Y_P^f(v)$ de $X^{*,f}(v)$ associée à P . Soit $\mathbb{L}_{1,P}$ le faisceau de monodromie surconvergente modulo p sur $Y_P^{\text{rig}}(v)$. Il coïncide avec le sous-groupe canonique $H_{1,P}$ d'échelon 1 et est donc fini et plat sur $Y_P^{\text{rig}}(v)$.

Soit $T_{1,P,v}^{\text{rig}} = \text{Isom}_{Y_P^{\text{rig}}(v)}(T_{P,h}[p], \mathbb{L}_{1,P})$ la variété rigide d'Igusa d'échelon 1 au-dessus de $Y_P^{\text{rig}}(v)$ et soit $T_{I,P,v}^{\text{rig}}$ son quotient par $B_{P,h}(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ où $B_{P,h}$ désigne le sous-groupe de Borel

de $M_{P,h}$ obtenu par projection de $B \cap P$ dans $M_{P,h}$. On note $T_{I,P,v}^f$ la normalisation de $Y_P^f(v)$ dans $T_{I,P,v}^{\text{rig}}$. Avec ces notations, on a le

LEMME 9.3.1. *Le morphisme $\pi_{I,\emptyset}^{*,f}$ est fini ; le schéma $T_{I,v}^{*,f}$ est muni d'une stratification naturelle, indexée par $[P] \in \mathbf{\Pi}_{[Q]}/\Gamma$ (ou par $P \in \mathbf{\Pi}_Q/\Gamma_Q$) ; l'ensemble des composantes irréductibles de la r -strate est en bijection avec l'ensemble $\mathbf{\Pi}_{[Q],r}/\Gamma$ des Γ -classes de conjugaison de $\mathbf{\Pi}_{[Q],r}$; pour $[P] \in \mathbf{\Pi}_{[Q],r}/\Gamma$ composante irréductible associée à $[P]$ est isomorphe à $T_{I,P,v}^f$. Cette stratification est compatible par $\pi_{I,\emptyset}^{*,f}$ avec la stratification de $X^{*,f}(v)$: cette application induit une bijection sur l'ensemble des strates et pour tout $[P] \in \mathbf{\Pi}/\Gamma$, $\pi_{I,\emptyset}^{*,f}$ envoie la strate $T_{I,P,v}^f$ sur la strate $Y_P^f(v)$.*

Démonstration. Montrons d'abord l'énoncé pour les fibres rigides. L'espace $T_{I,v}^{*,\text{rig}}$ est un ouvert affinoïde connexe de $X_B^{*,\text{rig}}(p)$ qui s'identifie à la composante connexe de $X_B^{*,\text{rig}}(p)(v)$ contenant le lieu où le sous-groupe lagrangien H' est de type multiplicatif. Les composantes irréductibles des strates de $X_B^{*,\text{rig}}(p)$ sont des variétés de Siegel de niveau iwahorique $Y_{P,B_{P,h}}^{\text{rig}}(p)$. On sait que $T_{I,P,v}^{\text{rig}}$ s'identifie à la composante connexe de $Y_{P,B_{P,h}}^{\text{rig}}(p)(v)$ contenant le lieu où le sous-groupe canonique H'_P de A_P est de type multiplicatif. Pour la fibre rigide $T_{I,v}^{*,\text{rig}}$ de $T_{I,v}^{*,f}$, l'énoncé du Lemme revient à dire que l'on a $T_{I,v}^{*,\text{rig}} \cap Y_{P,B_{P,h}}^{\text{rig}} = T_{I,P,v}^{\text{rig}}$, ce qui résulte des définitions.

Pour passer aux modèles entiers, rappelons [Str10] qu'on peut définir des compactifications toroïdale et minimale $\bar{X}_B(p)_{\mathbf{Z}_p}$ et $X_B^*(p)_{\mathbf{Z}_p}$, normales sur \mathbf{Z}_p . Par [Str10, Théorème principal], la $[P]_{\Gamma_0(p)}$ -strate de $X_B^*(p)_{\mathbf{Z}_p}$ est réunion (finie) d'espaces de modules $Y_{P,B_{P,h},\mathbf{Z}_p}$, modèles entiers des variétés de Shimura (à mauvaise réduction) $Y_{P,B_{P,h}}$. Le schéma formel $T_{I,P,v}^f$ est une composante irréductible du modèle formel d'Andreatta-Gasbarri $Y_{P,B_{P,h}}^f(v)$. Ceci permet de choisir une section de la projection de l'ensemble des $\Gamma_0(p)$ -orbites $[P]_{\Gamma_0(p)}$ vers l'ensemble des Γ -orbites $[P]$; qu'on notera encore $[P]$. L'immersion ouverte $T_{I,v}^{*,\text{rig}} \rightarrow X_B^{*,\text{rig}}(p)$ induit par normalisation une immersion fermée de $T_{I,v}^{*,f}$ dans le schéma formel normal $X_B^{*,f}(p)(v)$, qui est relativement irréductible au-dessus de $X_B^{*,f}(p)$. On voit alors que les immersions localement fermées $T_{I,P,v}^{\text{rig}} \hookrightarrow T_{I,v}^{*,\text{rig}}$ se prolongent par normalisation en des immersions localement fermées $T_{I,P,v}^f \hookrightarrow T_{I,v}^{*,f}$ dont les images sont irréductibles ; lorsque P parcourt $[P]_{\Gamma_0(p)}$, ces images forment un recouvrement de la $[P]$ -strate de $T_{I,v}^{*,f}$; en effet cette strate est l'intersection avec $T_{I,v}^{*,f}$ de la $[P]_{\Gamma_0(p)}$ -strate de $X_B^{*,f}(p)(v)$. \square

Pour tout parabolique maximal rationnel propre P , soit $\mathcal{B}_{I,P}^f(v) = \mathcal{B}_P^f(v) \times_{Y_P^f(v)} T_{I,P,v}$, $\Xi_{I,P}(v) = \Xi_P(v) \times_{Y_P^f(v)} T_{I,P,v}$ le E_P -torseur sur $\mathcal{B}_{I,P}(v)$ obtenu par changement de base à $T_{I,P,v}$. Soit $\Xi_{I,P,\sigma}(v)$, resp. $\Xi_{I,P,\Sigma_P}(v)$ les immersions toroidales de $\Xi_{I,P}(v)$ au-dessus de $\mathcal{B}_{I,P}^f(v)$ obtenues par changement de base de $\mathcal{B}_P^f(v)$ à $\mathcal{B}_{I,P}^f(v)$; soit $Z_{I,P,\sigma}$, resp. Z_{I,P,Σ_P} , la strate fermée de $\Xi_{I,P,\sigma}(v)$, resp. $\Xi_{I,P,\Sigma_P}(v)$. Soit $D_{I,P,\sigma}^f(v)$, resp. $D_{I,P}^f(v)$, le pull-back de $D_{P,\sigma}^f(v)$, resp. de $D_{P,\sigma}^f(v)$, par $\bar{\pi}_{I,\emptyset}^f$.

LEMME 9.3.2. *La complétion de $\bar{T}_{I,v}^f$ le long de $D_{I,P,\sigma}^f(v)$, resp. $D_{I,P}^f(v)$, est isomorphe au quotient par $\Gamma_{P,\sigma}$, resp. par $\Gamma_{P,\ell}$ de la complétion $\widehat{\Xi}_{I,P,\sigma}(v)$ de $\Xi_{I,P,\sigma}(v)$ le long de $Z_{I,P,\sigma}$, resp.*

de $\Xi_{I,P,\Sigma_P}(v)$ le long de Z_{I,P,Σ_P} ; de plus, les isomorphismes

$$\phi_{I,P,\sigma} : \widehat{\Xi}_{I,P,\sigma}(v)/\Gamma_{I,P,\sigma} \rightarrow (\widehat{\overline{T}}_{I,v}^f)_{D_{I,P,\sigma}^f}, \quad \phi_{I,P,\ell} : \widehat{\Xi}_{I,P,\ell}(v)/\Gamma_{I,P,\ell} \rightarrow (\widehat{\overline{T}}_{I,v}^f)_{D_{I,P,\ell}^f}$$

sont les changements de bases de $\phi_{P,\sigma}$, resp. ϕ_{P,Σ_P} à $T_{I,P,v}^f$.

9.4 Cartes locales en niveau p^s pour $1 \leq s \leq \infty$

Dans cette section et la suivante, comme l'indice de surconvergence v ne varie pas, on l'omettra dans tous les termes de la tour d'Igusa. On notera par exemple, pour tout $s \geq 1$, $\overline{T}_{N_0^+,s}^{\text{rig}}$ au lieu de $\overline{T}_{N_0^+,s,v}^{\text{rig}}$. Notons $D_{I,P}$ resp. $D_{s,P}$ l'image inverse de D_P dans $\overline{T}_I^{\text{rig}}$, resp. $\overline{T}_s^{\text{rig}}$ (ou dans $\overline{T}_{N_0^+,s}^{\text{rig}}$). La complétion du morphisme $\widehat{\pi}_{s,I}^{\text{rig}}$ le long de $D_{s,P}$ s'insère dans un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\Xi}_{s,P,\Sigma_P}^{\text{rig}}(v)/\Gamma_{P,\ell} & \xrightarrow{\phi_{s,P}} & (\widehat{\overline{T}}_s^{\text{rig}})_{D_{s,P}} \\ \downarrow & & \downarrow \widehat{\pi}_{s,I} \\ \widehat{\Xi}_{I,P,\Sigma_P}^{\text{rig}}(v)/\Gamma_{P,\ell} & \xrightarrow{\phi_{I,P}} & (\widehat{\overline{T}}_I^{\text{rig}})_{D_{I,P}} \end{array}$$

où l'on a posé

$$\Xi_{s,P,\Sigma_P}^{\text{rig}}(v) = \text{Isom}_{\Xi_{P,\Sigma_P}^{\text{rig}}(v)}(\mu_{p^s}^g, \phi_{P,\Sigma_P}^* \mathbb{L}_s)$$

resp.

$$\Xi_{I,P,\Sigma_P}^{\text{rig}}(v) = \Xi_{1,P,\Sigma_P}^{\text{rig}}(v)/B(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}),$$

et où les flèches horizontales sont des isomorphismes I -équivariants. On a de même en quotientant la première ligne par N_0^+ :

$$\begin{array}{ccc} (\widehat{\Xi}_{s,P,\Sigma_P}^{\text{rig}}(v)/\Gamma_{P,\ell})/N_0^+ & \xrightarrow{\phi_{s,P}} & (\widehat{\overline{T}}_{N_0^+,s}^{\text{rig}})_{D_{s,P}} \\ \downarrow & & \downarrow \pi_{s,I} \\ \widehat{\Xi}_{I,P,\Sigma_P}^{\text{rig}}(v)/\Gamma_{P,\ell} & \xrightarrow{\phi_{I,P}} & (\widehat{\overline{T}}_I^{\text{rig}})_{D_{I,P}} \end{array}$$

et en prenant la limite projective quand $s \rightarrow \infty$ et en prenant les produits contractés par T_0 agissant sur la droite affine par κ :

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\Xi}_{N_0^+,P,\Sigma_P}^{\kappa,\text{rig}}(v)/\Gamma_{P,\ell} & \xrightarrow{\phi_{\infty,P}} & (\widehat{\overline{T}}_{N_0^+}^{\kappa,\text{rig}})_{D_{\infty,P}} \\ \downarrow & & \downarrow \pi_{s,I} \\ \widehat{\Xi}_{I,P,\Sigma_P}^{\text{rig}}(v)/\Gamma_{P,\ell} & \xrightarrow{\phi_{I,P}} & (\widehat{\overline{T}}_I^{\text{rig}})_{D_{I,P}} \end{array}$$

où l'on a posé

$$\widehat{\Xi}_{N_0^+,P,\Sigma_P}^{\kappa,\text{rig}}(v) = \widehat{\Xi}_{\infty,P,\Sigma_P}^{\text{rig}}(v) \times^{B_0^+} \mathbf{A}^1$$

et

$$(\widehat{\overline{T}}_{N_0^+}^{\kappa,\text{rig}})_{D_{\infty,P}} = (\widehat{\overline{T}}_{\infty}^{\text{rig}})_{D_{\infty,P}} \times^{B_0^+} \mathbf{A}^1$$

Soit $B_{P,h}$ le Borel de $M_{P,h}$ image de $B \cap P$ par la projection $P \rightarrow M_{P,h}$ soit $N_{P,h}^+$ le radical unipotent de $B_{P,h}$; pour alléger la notation, on note encore $N_{P,h}^+$ le groupe de ses \mathbf{Z}_p -points

(qu'on devrait noter $N_{P,h,0}^+$) ; soit $I_{P,h}$ le sous-groupe d'Iwahori de $M_{P,h}(\mathbf{Z}_p)$ associé à $B_{P,h}$. On a des tours d'Igusa surconvergentes $T_{P,s}^{\text{rig}} \rightarrow T_{I_{P,h}}^{\text{rig}}$ et $T_{P,N_{P,h,s}^+}^{\text{rig}} \rightarrow T_{I_{P,h}}^{\text{rig}}$ au-dessus de l'ouvert $Y_P^{\text{rig}}(v)$ de la variété de Siegel Y_P^{rig} , données par :

$$T_{P,s}^{\text{rig}} = \text{Isom}_{Y_P^{\text{rig}}(v)}(T_{P,h}[p^s], \mathbb{L}_{P,s})$$

qui est l'espace des $(\mathbf{Z}/p^s\mathbf{Z})$ -bases de $\mathbb{L}_{P,s}(-1)$, et

$$T_{P,N_{P,h,s}^+}^{\text{rig}} = \text{Isom}_{Y_P^{\text{rig}}(v)}(T_{P,h}[p^s], \mathbb{L}_{P,s})/N_{P,h}^+$$

qui est l'espace des drapeaux complets de $\mathbb{L}_{P,s}(-1)$ munis de rigidifications $\tau_i: \mathbf{Z}/p^s\mathbf{Z} \cong \text{gr}_i \mathbb{L}_{P,s}(-1)$, $i = 1, \dots, r$. De même, en notant $T_p T_{P,h}$ le module de Tate du tore $T_{P,h}$, on forme

$$T_{P,\infty}^{\text{rig}} = \text{Isom}_{Y_P^{\text{rig}}(v)}(T_p T_{P,h}, \mathbb{L}_P)$$

et

$$T_{P,N_{P,h}^+}^{\text{rig}} = \text{Isom}_{Y_P^{\text{rig}}(v)}(T_p T_{P,h}, \mathbb{L}_P)/N_{P,h}^+.$$

Notons que

$$\Xi_{I,P,\Sigma_P}^{\text{rig}}(v) = \Xi_{P,\Sigma_P}^{\text{rig}}(v) \times_{Y_P^{\text{rig}}(v)} T_{P,I_{P,h}}^{\text{rig}}.$$

Par 9.1.1, l'extension de Raynaud sur $\Xi_{P,\Sigma_P}^{\text{rig}}(v)$ fournit pour chaque $s \geq 1$ un dévissage

$$0 \rightarrow T_{P,\ell}[p^s] \rightarrow \phi_{P,\Sigma_P}^* \mathbb{L}_s \rightarrow \mathbb{L}_{P,s} \rightarrow 0.$$

Soient I_s , $I_{P,s}$, $I_{P,?,s}$, resp. $W_{P,s}$, les réductions mod. p^s du groupe I , de $I \cap P$, de sa projection $I_{P,?}$ dans $M_{P,?}$ pour $? \in \{\ell, h\}$, resp. du groupe W_P des \mathbf{Z}_p -points du radical unipotent de $M_Q \cap P$ (qui s'identifie à $\text{Hom}(L_{P,\ell}, L_{P,h})$). On voit que $T_{P,s}^{\text{rig}} \rightarrow T_{I_{P,h}}^{\text{rig}}$ est un $I_{P,h,s}$ -torseur étale. Considérons le $I_{P,s}$ -torseur étale des isomorphismes filtrés, resp. le $I_{P,\ell} \times I_{P,h}$ -torseur des isomorphismes gradués :

$$\Xi_{s,P,\Sigma_P,\text{fil}}^{\text{rig}}(v) = \text{Isom}_{\Xi_{P,\Sigma_P}^{\text{rig}}(v),\text{fil}}(T_{P,\ell}[p^s] \times T_{P,h}[p^s], \phi_{P,\Sigma_P}^* \mathbb{L}_s)$$

et

$$\Xi_{s,P,\Sigma_P,\text{gr}}^{\text{rig}}(v) = \text{Isom}_{\Xi_{P,\Sigma_P}^{\text{rig}}(v),\text{gr}}(T_{P,\ell}[p^s] \times T_{P,h}[p^s], \phi_{P,\Sigma_P}^* \mathbb{L}_s) = I_{P,\ell,s} \times T_{P,s}^{\text{rig}}$$

Le premier représente les bases de $\phi_{P,\Sigma_P}^* \mathbb{L}_s(-1)$ adaptées au dévissage 9.1.1, le second, les couples $(g_{P,\ell}, \psi_{P,h})$ où $g_{P,\ell} \in I_{P,\ell,s}$ et $\psi_{P,h}$ est une base de $\mathbb{L}_{P,s}(-1)$. Le morphisme canonique $\xi_P: \Xi_{s,P,\Sigma_P,\text{fil}}^{\text{rig}}(v) \rightarrow \Xi_{s,P,\Sigma_P,\text{gr}}^{\text{rig}}(v)$ est un toseur sous $W_{P,s}$. Montrons que ce toseur est trivial. La donnée d'une base de $\mathbb{L}_{P,s}(-1)$ induit une base de $\phi_{P,\Sigma_P}^* \mathbb{L}(-1)$, donc la donnée d'une trivialisation du $I_{P,h}$ -torseur $T_{P,s}^{\text{rig}}$ fournit aussi (non canoniquement) une trivialisation du I_s -torseur $\Xi_{s,P,\Sigma_P,\text{fil}}^{\text{rig}}(v) \rightarrow \Xi_{I,P,\Sigma_P}^{\text{rig}}(v)$. On applique cela au point tautologique de $T_{P,s}^{\text{rig}}$ et on obtient une section de ξ_P .

Soit $\mathcal{T}_{P,s}^{\text{rig}} = (I_{P,\ell,s} \times T_{P,s}^{\text{rig}}) \ltimes W_{P,s}$. L'action de $I_{P,s}$ sur $I_{P,\ell,s} \times T_{P,s}^{\text{rig}}$ se factorisant par la projection $I_{P,s} \rightarrow I_{P,s}/W_{P,s} = I_{P,\ell,s} \times I_{P,h,s}$ et le symbole de produit semi-direct signifie que l'action de $I_{P,s}$ sur ce produit est donnée par multiplication à droite comme suit : si on écrit $g' \in I_{P,s} = (I_{P,\ell,s} \times I_{P,h,s}) \ltimes W_{P,s}$ comme $g' = (m'_P, w')$ avec $m'_P = (g'_{P,\ell}, g'_{P,h})$, on a

$$((g_{P,\ell}, \psi_{P,h}), w) \circ (m'_P, w') = ((g_{P,\ell} g'_{P,\ell}, \psi_{P,h} \circ g'_{P,h}), m'_P{}^{-1} w m' w')$$

On a un morphisme de projection $\mathcal{T}_{P,s}^{\text{rig}} \rightarrow T_{P,s}^{\text{rig}}$, avec une section permettant de décomposer l'espace rigide $\mathcal{T}_{P,s}^{\text{rig}}$ comme une somme disjointe de copies $T_{P,s}^{\text{rig}} \times \{\lambda\}$, $\lambda \in I_{P,\ell,s} \times W_{P,s}$. On peut alors écrire $\Xi_{s,P,\Sigma_P,fil}^{\text{rig}}(v)$ sous la forme

$$\Xi_{s,P,\Sigma_P,fil}^{\text{rig}}(v) = \Xi_{P,\Sigma_P}^{\text{rig}}(v) \times_{Y_P(v)^{\text{rig}}} \mathcal{T}_{P,s}^{\text{rig}}$$

D'autre part il est clair que $\Xi_{s,P,\Sigma_P}^{\text{rig}}(v)$ est l'induite parabolique ensembliste de $\Xi_{s,P,\Sigma_P,fil}^{\text{rig}}(v)$:

$$\Xi_{s,P,\Sigma_P}^{\text{rig}}(v) = \text{Ind}_{I_{P,s}}^{I_s} \Xi_{s,P,\Sigma_P,fil}^{\text{rig}}(v) = \Xi_{s,P,\Sigma_P}^{\text{rig}}(v) \times I_s / \sim$$

où $(\psi \circ p, g) \sim (\psi, pg)$ pour tout $p \in I_{P,s}$ et tout $g \in I_s$. On a donc

$$\Xi_{s,P,\Sigma_P}^{\text{rig}}(v) = \Xi_{P,\Sigma_P}^{\text{rig}}(v) \times_{Y_P^{\text{rig}}(v)} \left(\text{Ind}_{I_{P,s}}^{I_s} \mathcal{T}_{P,s}^{\text{rig}} \right)$$

avec

$$\text{Ind}_{I_{P,s}}^{I_s} \mathcal{T}_{P,s}^{\text{rig}} = \bigsqcup_{\dot{g} \in I_{P,s} \setminus I_s} \mathcal{T}_{P,s}^{\text{rig}} \times \{\dot{g}\}$$

On peut alors calculer les quotients $\Xi_{N_0^+,s,P,\Sigma_P}^{\text{rig}}(v) = \Xi_{s,P,\Sigma_P}^{\text{rig}}(v)/N_0^+$ ($s \geq 1$) et $\Xi_{N_0^+,P,\Sigma_P}^{\kappa,\text{rig}}(v)$ (le caractère $\kappa: T_0 \rightarrow \mathcal{O}_L^\times$ est fixé ci-dessous, on traiterait le cas du caractère universel κ_u sur \mathcal{U}_u de manière analogue, mais avec des notations plus lourdes).

Pour chaque $g \in I_s$, le stabilisateur de $\mathcal{T}_{P,s}^{\text{rig}} \times \{\dot{g}\}$ dans N_0^+ est $g^{-1}I_{P,s}g \cap N_0^+$, et le quotient correspondant s'identifie à $\mathcal{T}_{P,s}^{\text{rig}}/(gN_0^+g^{-1} \cap P) \times \{\dot{g}\}$. On peut donc identifier

$$\left(\text{Ind}_{I_{P,s}}^{I_s} \mathcal{T}_{P,s}^{\text{rig}} \right) / N_0^+$$

à la somme disjointe des quotients

$$\bigsqcup_{\dot{g}} \mathcal{T}_{P,s}^{\text{rig}} / (gN_0^+g^{-1} \cap P) \times \{\dot{g}\}$$

l'ensemble d'indice étant $I_{P,s} \setminus I_s / N^+(\mathbf{Z}/p^s\mathbf{Z})$. On remarque alors que $\mathcal{T}_{P,s}^{\text{rig}}/(gN_0^+g^{-1} \cap P)$ s'identifie à une somme disjointe de copies (indexées par $\lambda \in I_{P,\ell,s} \times W_{P,s}$) de $T_{P,^gN_{P,h}^+}^{\text{rig}} = T_{P,s}^{\text{rig}}/{}^gN_{P,h}^+$ où l'on note ${}^gN_{P,h}^+$ l'image de $gN_0^+g^{-1} \cap P$ par la projection $I_P \rightarrow I_{P,h}$. Remarquer que, malgré les apparences, la notation ${}^gN_{P,h}^+$ ne désigne pas un sous-groupe de ${}^gI_{P,h}$, mais bien de $I_{P,h}$ lui-même ! On conclut donc

LEMME 9.4.1. *Pour tout $s \in \{1, \dots, \infty\}$, $\Xi_{N_0^+,s,P,\Sigma_P}^{\text{rig}}(v)$ s'identifie à la somme disjointe topologique des $\Xi_{P,\Sigma_P}^{\text{rig}}(v) \times_{Y_P^{\text{rig}}(v)} T_{P,^gN_{P,h}^+}^{\text{rig}}$, indexée par des couples (\dot{g}, λ) où $\lambda \in I_{P,\ell,s} \times W_{P,s}$ et $\dot{g} \in I_{P,s} \setminus I_s / N^+(\mathbf{Z}/p^s\mathbf{Z})$.*

Soit ${}^g\kappa_{P,h}$ la restriction de ${}^g\kappa: {}^gT_0 \rightarrow \mathcal{O}_L^\times$, ${}^g t_0 \mapsto \kappa(t_0)$ au tore ${}^gT_0 \cap I_{P,h}$. Il permet de définir (en niveau p^∞) un produit contracté

$$T_{P,^gN_{P,h}^+}^{^g\kappa_{P,h},\text{rig}} = T_{P,^gN_{P,h}^+}^{\text{rig}} \times^{^gB_{P,h}, {}^g\kappa_{P,h}} \mathbf{A}^1.$$

On déduit du lemme précédent en passant à la limite lorsque $s \rightarrow \infty$ et en prenant le produit contracté par T_0 agissant sur \mathbf{A}^1 par κ .

LEMME 9.4.2. *L'espace $\Xi_{N_0^+, P, \Sigma_P}^{\kappa, \text{rig}}(v)$ s'identifie à une somme disjointe topologique de*

$$\Xi_{P, \Sigma_P}^{\text{rig}}(v) \times_{Y_P^{\text{rig}}(v)} T_{P, {}^g N_{P, h}^+}^{{}^g \kappa_{P, h}, \text{rig}}$$

indexée par un quotient \mathcal{X}_P de l'espace topologique profini $(I_P \backslash I / N_0^+ \times (I_{P, \ell} \times W_P))$. Cette description est compatible avec l'action de $\Gamma_{P, \ell}$ sur chaque terme de la somme disjointe, usuelle sur le facteur $\Xi_{P, \Sigma_P}^{\text{rig}}(v)$ et triviale sur $T_{P, {}^g N_{P, h}^+}^{{}^g \kappa_{P, h}, \text{rig}}$.

Soit $T_{P, s}^f$, resp. $T_{P, {}^g N_{P, h}^+}^f$, la normalisation de $Y_P^f(v)$ dans $T_{P, s}^{\text{rig}}$, resp. $T_{P, {}^g N_{P, h}^+}^{\text{rig}}$. On considère le produit contracté $T_{P, {}^g N_{P, h}^+}^{{}^g \kappa_{P, h}, f}$ de $T_{P, {}^g N_{P, h}^+}^f \times \mathbf{A}^1$ par le caractère ${}^g \kappa_{P, h}$ de ${}^g T_0 \cap I_{P, h}$; c'est un fibré en droites sur le schéma formel (non nécessairement normal) $T_{P, {}^g B_{P, h}^+}^f = T_{P, {}^g N_{P, h}^+}^f / T_0$. On définit

$$\Xi_{s, P, \Sigma_P}^f(v) = \Xi_{P, \Sigma_P}^f(v) \times_{Y_P^f(v)} \left(\text{Ind}_{I_{P, s}}^{I_s} ((I_{P, \ell, s} \times T_{P, s}^f) \rtimes W_{P, s}) \right)$$

et en posant

$$\mathcal{T}_{P, N_{P, h}^+}^f = \bigsqcup_{\dot{g}, \lambda} T_{P, {}^g N_{P, h}^+}^f,$$

où $\dot{g} \in I_{P, s} \backslash I_s / N^+(\mathbf{Z}/p^s \mathbf{Z})$ et $\lambda \in I_{P, \ell, s} \times W_{P, s}$, on introduit aussi

$$\Xi_{N_0^+, s, P, \Sigma_P}^f(v) = \Xi_{P, \Sigma_P}^f(v) \times_{Y_P^f(v)} \text{Ind}_{I_{P, s}}^{I_s} \mathcal{T}_{P, N_{P, h}^+}^f$$

et (en niveau p^∞) :

$$\Xi_{N_0^+, P, \Sigma_P}^{\kappa, f}(v) = \bigsqcup_{(g, \lambda) \in \mathcal{X}_P} \Xi_{P, \Sigma_P}^f(v) \times_{Y_P^f(v)} T_{P, N_{P, h}^+}^{\kappa_{P, h}, f}.$$

Soit $\Xi_{I, P, \Sigma_P, m}$, resp. $\Xi_{N_0^+, s, P, \Sigma_P, m}$, resp. $\Xi_{N_0^+, P, \Sigma_P, m}^\kappa$ la réduction modulo p^m de $\Xi_{I, P, \Sigma_P}^f(v)$ resp. $\Xi_{N_0^+, s, P, \Sigma_P}^f(v)$, resp. $\Xi_{N_0^+, P, \Sigma_P, m}^\kappa$; on considère les complétions de ces schémas le long de la fibre en un point géométrique x de $T_{P, I, m} : \widehat{\Xi}_{I, P, \Sigma_P, m, x}(v)$, $\widehat{\Xi}_{N_0^+, s, P, \Sigma_P, m, x}(v)$, $\widehat{\Xi}_{N_0^+, P, \Sigma_P, m, x}^\kappa(v)$. On obtient des isomorphismes

$$(\widehat{\overline{T}_{N_0^+, s, m}})_x = \widehat{\Xi}_{N_0^+, s, P, \Sigma_P, m, x}(v) / \Gamma_{P, \ell}$$

d'où, par produit contracté par T_0 :

$$(\widehat{\overline{T}_{N_0^+, m}^\kappa})_x = \widehat{\Xi}_{N_0^+, P, \Sigma_P, m, x}^\kappa(v) / \Gamma_{P, \ell}$$

On voit qu'on a un modèle local du morphisme composé $\Pi_{I, m} \circ \overline{\pi}_{s, I, m}$:

$$(\widehat{\overline{T}_{s, N_0^+, m}})_x \rightarrow (\widehat{\overline{T}_{I, m}})_x \rightarrow (\widehat{T_{I, m}^*})_x$$

resp., en niveau p^∞ :

$$(\widehat{\overline{T}_{N_0^+, m}^\kappa})_x \rightarrow (\widehat{\overline{T}_{I, m}})_x \rightarrow (\widehat{T_{I, m}^*})_x$$

donné par une somme disjointe sur les couples (\dot{g}, λ) comme ci-dessus de morphismes composés

$$\Pi_{P, I, m} \circ \text{pr}_1 : \left(\widehat{\Xi}_{I, P, \Sigma_P, m, x} / \Gamma_{P, \ell} \right) \times_{\widehat{T}_{P, I, m, x}} \widehat{T}_{P, {}^g N_{P, h}^+}^{{}^g \kappa_{P, h}, s, m, x} \rightarrow \left(\widehat{\Xi}_{I, P, \Sigma_P, m, x} / \Gamma_{P, \ell} \right) \rightarrow \widehat{T}_{P, I, m, x}$$

resp., en niveau p^∞ :

$$\Pi_{P,I,m} \circ \text{pr}_1 : \left(\widehat{\Xi}_{I,P,\Sigma_P,m,x}/\Gamma_{P,\ell} \right) \times_{\widehat{T}_{P,I,m,x}} \widehat{T}_{P,gN_{P,h,m}^+,m,x}^{\kappa_{P,h,m}} \rightarrow \left(\widehat{\Xi}_{I,P,\Sigma_P,m,x}/\Gamma_{P,\ell} \right) \rightarrow \widehat{T}_{P,I,m,x}$$

qu'on peut réécrire comme

$$\pi_{P,s,I,m} \circ \text{pr}_2 : \left(\widehat{\Xi}_{I,P,\Sigma_P,m,x}/\Gamma_{P,\ell} \right) \times_{\widehat{T}_{P,I,m,x}} \widehat{T}_{P,gN_{P,h,m}^+,s,m,x} \xrightarrow{\text{pr}_2} \widehat{T}_{P,gN_{P,h,m}^+,s,m,x} \rightarrow \widehat{T}_{P,I,m,x}$$

resp., en niveau p^∞ :

$$\pi_{P,I,m} \circ \text{pr}_2 : \left(\widehat{\Xi}_{I,P,\Sigma_P,m,x}/\Gamma_{P,\ell} \right) \times_{\widehat{T}_{P,I,m,x}} \widehat{T}_{P,gN_{P,h,m}^+,m,x}^{\kappa_{P,h,m}} \xrightarrow{\text{pr}_2} \widehat{T}_{P,gN_{P,h,m}^+,m,x}^{\kappa_{P,h,m}} \rightarrow \widehat{T}_{P,I,m,x}$$

puisqu'on a la commutation évidente $\Pi_{P,I,m} \circ \overline{\pi}_{P,s,I,m} = \pi_{P,s,I,m} \circ \Pi_{P,s,m}$. Notons que cette formule joue le rôle de la formule $\Pi_{I,m} \circ \overline{\pi}_{s,I,m} = \pi_{s,I,m}^* \circ \Pi_{s,m}$, dépourvue de sens puisqu'on ne peut pas définir $T_{s,v}^{*,\text{rig}}$!

9.5 Démonstration du théorème de changement de base

On a vu dans 9.2.1 que la réduction $\kappa_{u,m}$ de κ_u modulo p^m se factorise par un quotient fini de T_0 , de sorte que

$$(\Pi_{I,m} \times \text{Id}_{\mathcal{U}_{u,m}})_* \mathcal{O}_{v,w,!,m}^{\kappa_u} = \varinjlim_{s \geq \text{Cond}(\kappa_{u,m})} (\Pi_{I,m} \times \text{Id}_{\mathcal{U}_{u,m}})_* \mathcal{O}_{v,w,s,!,m}^{\kappa_u}.$$

On suit la stratégie de la démonstration du théorème 8.2.2.3 de [AIP, Sect.8.2]. On se ramène à comparer pour tout $s \geq \text{Cond}(\kappa_{u,m})$ les faisceaux cohérents $i_{\ell,m}^*(\Pi_{I,m} \times \text{Id}_{\mathcal{U}_{u,m}})_* \mathcal{O}_{v,w,s,!,m}^{\kappa_u}$ et $(\Pi_{I,\ell} \times \text{Id}_{\mathcal{U}_{u,\ell}})_* \mathcal{O}_{v,w,!,\ell}^{\kappa_u}$. Plus précisément, on veut montrer que le morphisme canonique

$$i_{\ell,m}^*(\Pi_{I,m} \times \text{Id}_{\mathcal{U}_{u,m}})_* \mathcal{O}_{v,w,!,m}^{\kappa_u} \rightarrow (\Pi_{I,\ell} \times \text{Id}_{\mathcal{U}_{u,\ell}})_* \mathcal{O}_{v,w,!,\ell}^{\kappa_u}$$

est un isomorphisme. Il suffit de montrer que c'est le cas après complétion en chaque point fermé de $T_{I,v,\ell}^*$. Supposons $x \in T_{I,P,\ell}$ pour un $[P] \in \Pi_Q/\Gamma_Q$ fixé.

Pour chaque $s \geq 1$, soit $\mathcal{X}_{P,s}$ l'ensemble fini quotient de \mathcal{X}_P par le groupe de congruence principal de niveau p^s ; pour $(\dot{g}, \lambda) \in \mathcal{X}_{P,s}$, soit $g_{\kappa_u} : \mathcal{T}_0 \rightarrow \mathbf{G}_m$ le caractère défini par transport de structure : $g_{\kappa_u}(g_{t_0}) = \kappa_u(t_0)$; soit $g_{\kappa_u,P,h}$ la restriction à l'image $g\Theta_{P,h}$ de $gB_0^+ \cap I \cap P$ par la projection $I_P \rightarrow I_{P,h}$, qu'on peut voir comme un facteur direct de \mathcal{T}_0 par la décomposition naturelle $\mathcal{T}_0 = g\Theta_{P,h} \times g\Theta_{P,\ell}$. Pour chaque $s \geq \text{Cond}(\kappa_{u,m})$, considérons le faisceau $\Omega_{P,gB_{P,h}^+,s,m}^{g_{\kappa_u,P,h,m}}$ des sections sur $T_{P,gB_{P,h}^+,s,m}$ du fibré en droites

$$T_{P,gN_{P,h}^+,s,m}^{g_{\kappa_u,P,h,m}} \rightarrow T_{P,gB_{P,h}^+,s,m} \times \mathcal{U}_{u,m}$$

où

$$T_{P,gN_{P,h}^+,s,m}^{g_{\kappa_u,P,h,m}} = T_{P,gN_{P,h}^+,s,m} \times^{g\Theta_{P,h}^+, g_{\kappa_u,P,h,m}} \mathbf{A}^1.$$

Soit $\pi_{P,gB_{P,h}^+,s,I,m} : T_{P,gB_{P,h}^+,s,m} \rightarrow T_{P,I,m}$. Pour chaque $s \geq \text{Cond}(\kappa_{u,m})$, on peut réécrire le faisceau $(\Pi_{I,m} \times \text{Id}_{\mathcal{U}_{u,m}})_* \mathcal{O}_{v,w,s,!,m}^{\kappa_u}$ comme le produit cartésien, indexé par $X_{P,s}$ de faisceaux de la forme

$$A_{P,g,s,m} \times_{\mathcal{C}(N_1^-, A_{P,g,s,m})} \mathcal{O}_{N^-(w)_m} \otimes A_{P,g,s,m}$$

et il suffit donc de voir que la formation du faisceau $A_{P,g,s,m}$ commute au changement de base.

On a :

$$A_{P,g,s,m} = (\pi_{P,gB_{P,h}^+,s,I,m} \times \text{Id}_{\mathcal{U}_{u,m}}) * \Omega_{P,gB_{P,h}^+,s,m}^{g\kappa_{u,P,h,m}} \otimes \Pi_{P,I,m,*} \widehat{\mathcal{O}}_{\Xi_{I,v,m,x}}(-D).$$

On observe d'abord que le morphisme $\pi_{P,gB_{P,h}^+,s,I,m} \times \text{Id}_{\mathcal{U}_{u,m}}$ est fini, ce qui implique que $(\pi_{P,gB_{P,h}^+,s,I,m} \times \text{Id}_{\mathcal{U}_{u,m}}) * \Omega_{P,gB_{P,h}^+,s,m}^{g\kappa_{u,P,h,m}}$ commute au changement de base $i_{\ell,m}^*$. Il reste à voir que $\Pi_{P,I,m,*} \widehat{\mathcal{O}}_{\Xi_{I,v,m,x}}(-D)$ commute au changement de base. Comme

$$\Pi_{P,I,m,*} \widehat{\mathcal{O}}_{\Xi_{I,v,m,x}}(-D) = \Pi_{P,m,*} \widehat{\mathcal{O}}_{\Xi_{P,m,x}}(-D) \otimes_{\mathcal{O}_{Y_{P,m}}} \mathcal{O}_{T_{P,I,v,m}},$$

cette commutation résulte directement du Cor.3.2 du théorème de Hida [Hid02, Th.3.1] (repris dans la démonstration du [AIP, Th.8.2.2.3]). Ceci achève la démonstration.

9.6 Démonstration du théorème d'acyclicité

Démonstration. On suit la démonstration de la proposition 8.2.2.4 de [AIP], en plus simple. On veut montrer que pour tout $m \geq 1$ et pour tout $i > 0$, on a $R^i \Pi_{I,m,*} \mathcal{O}_{v,w,m,!}^\kappa = 0$ et $R^i(\Pi_{I,m} \times \text{Id}_{\mathcal{U}_{u,m}}) * \mathcal{O}_{v,w,m,!}^{\kappa_u} = 0$. Pour alléger les notations, on traite le cas d'un caractère κ fixé. Il suffit de voir que $R^i \Pi_{I,m,x,*} \widehat{\mathcal{O}}_{v,w,! ,m,x}^\kappa = 0$ en tout point fermé géométrique x d'une strate $T_{P,I,m}$. Notons que $\pi_{B_0^+,s,I,m}$ est fini de sorte que les images directes supérieures par $\eta_{s,m} = \Pi_{I,m} \circ \pi_{B_0^+,s,I,m}$ sont données par $(R^i \Pi_{I,m,*}) \circ \pi_{B_0^+,s,I,m,*}$.

Soit $\mathcal{R}_{N_0^+,s,m}^\kappa = \pi_{B_0^+,s,m,*} \Omega_{N_0^+,s,m}^\kappa$; la réduction $\mathcal{R}_{N_0^+,m}^\kappa$ modulo p^m du faisceau $\mathcal{R}_{N_0^+}^\kappa$ sur $T_{I,v}^f$ défini en 7.4 s'écrit comme réunion (sur tous les s assez grands) :

$$\mathcal{R}_{N_0^+,m}^\kappa = \bigcup_s \mathcal{R}_{N_0^+,s,m}^\kappa.$$

Considérons le faisceau sur $\overline{T}_{B_0^+,s,m}$:

$$B_{s,m,!} = \Omega_{N_0^+,s,m}^\kappa(-D_m) \times_{\mathcal{C}(N_1^-, \Omega_{N_0^+,s,m}^\kappa)(-D_m)} \left(\mathcal{O}_{N^-(w)_m} \otimes \Omega_{N_0^+,s,m}^\kappa(-D_m) \right)$$

On a

$$\pi_{B_0^+,s,m,*} B_{s,m,!} = \mathcal{R}_{N_0^+,s,m}^\kappa(-D_m) \times_{\mathcal{C}(N_1^-, \mathcal{R}_{N_0^+,s,m}^\kappa)(-D_m)} \left(\mathcal{O}_{N^-(w)_m} \otimes \mathcal{R}_{N_0^+,s,m}^\kappa(-D_m) \right)$$

de sorte que $R^i \Pi_{I,m,*} \mathcal{O}_{v,w,s,! ,m}^\kappa = R^i \eta_{s,m,*} B_{s,m,!}$. Pour chaque s fixé, le théorème d'interpolation de Lagrange montre que la première projection

$$\text{pr}_1 : \pi_{B_0^+,s,m,*} B_{s,m,!} \rightarrow \mathcal{R}_{N_0^+,s,m}^\kappa(-D_m)$$

est surjective. Soit $\mathcal{I}_{s,m}$ l'idéal des $P \in \mathcal{O}_{N(w)_m}$ tels que $P(n_1^-) = 0$ pour tout $n_1^- \in N^-(p\mathbf{Z}/p^s\mathbf{Z})$. Pour chaque s fixé, on a la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{I}_{s,m} \rightarrow \mathcal{O}_{N(w)_m} \rightarrow C(N^-(p\mathbf{Z}/p^s\mathbf{Z}), W/p^m W) \rightarrow 0.$$

En tensorisant par $\mathcal{R}_{N_0^+,s,m}^\kappa(-D_m)$, et en prenant le produit fibré sur $C(N^-(p\mathbf{Z}/p^s\mathbf{Z}), \mathcal{R}_{N_0^+,s,m}^\kappa(-D_m))$, on obtient la suite exacte courte

$$0 \rightarrow \mathcal{I}_{s,m} \otimes_{W/p^m W} \mathcal{R}_{N_0^+,s,m}^\kappa(-D_m) \rightarrow \pi_{B_0^+,s,m,*} B_{s,m,!} \xrightarrow{\text{pr}_1} \mathcal{R}_{N_0^+,s,m}^\kappa(-D_m) \rightarrow 0$$

En passant à la suite exacte longue pour $R^i \Pi_{I,m,*}$, on voit donc qu'on est ramené à démontrer que $R^i \eta_{s,m,*} \Omega_{N_0^+,s,m}^\kappa(-D_m) = 0$ pour tout $i > 0$.

Par les calculs de la section 9.4, on est ramené à montrer que pour tout $s \geq \text{Cond}(\kappa_m)$ et pour tout couple (\dot{g}, λ) de $X_{P,s}$:

$$\pi_{P, {}^g B_{P,h}^+, s, I, m, *} \Omega_{P, {}^g B_{P,h}^+, s, m}^{g\kappa_{P,h,m}} \otimes R^i \Pi_{P, I, m, *} \widehat{\mathcal{O}}_{\Xi_{I,v,m,x}}(-D) = 0.$$

On est ramené à voir que $R^i \Pi_{P, I, m, *} \widehat{\mathcal{O}}_{\Xi_{I,v,m,x}}(-D) = 0$. Ceci résulte alors, dans le cas beaucoup plus simple du niveau premier à p , de [FC90, Th.V.5.8] comme dans la démonstration de la proposition 8.2.2.4 de [AIP]. \square

9.7 Projectivité et contrôle

On a vu que le module des \mathcal{U}_u -familles de formes (v, w) -Igusa-surconvergentes est donné par $S_{v,w}^{\kappa_u}(\Gamma_B(p)) = H^0(\overline{T}_{I,v}, \mathcal{O}_{v,w}^{\kappa_u}) = H^0(T_{I,v}^*, (\Pi_{I,v}^f \times \text{Id}_{\mathcal{U}_u^f})_* \mathcal{O}_{v,w}^{\kappa_u})$.

PROPOSITION 9.7.1. *Le $\mathbf{A}(\mathcal{U}_u, K)$ -module de Banach $S_{v,w}^{\kappa_u}(\Gamma_B(p))$ est projectif.*

On va utiliser une variante de [AIP, Th.A.1.2.2] :

LEMME 9.7.2. *Soit \mathfrak{X} un schéma formel sur \mathbf{Z}_p admissible normal quasi-projectif de fibre générique X affinoïde ; soit \mathfrak{F} un faisceau formel de Banach sur \mathfrak{X} qui définit un faisceau fibre générique rigide \mathcal{F} sur X . Soit \mathfrak{F}_m et $\mathfrak{X}_m = \mathfrak{X} \otimes \mathbf{Z}/p^m \mathbf{Z}$ les réductions modulo p^m de \mathfrak{F} et \mathfrak{X} . On suppose que $\mathfrak{F}_m = \varinjlim_s \mathfrak{F}_{s,m}$ où les $\mathfrak{F}_{s,m}$ sont cohérents et commutent au changement de base : si $\ell < m$, $i_{\ell,m}^* \mathfrak{F}_{s,m} = \mathfrak{F}_{s,\ell}$. Soit (U_i^f) un recouvrement affine formel de \mathfrak{X} . Alors, la suite*

$$0 \rightarrow H^0(\mathfrak{X}, \mathfrak{F})[1/p] \rightarrow \bigoplus_i H^0(U_i^f, \mathfrak{F})[1/p] \rightarrow \bigoplus_{ij} H^0(U_{ij}^f, \mathfrak{F})[1/p] \rightarrow \dots$$

est exacte.

Démonstration. Comme dans la démonstration du Th.A.1.2.2 de [AIP], on peut supposer qu'il existe un morphisme formel projectif $\mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Z}$ et un faisceau inversible ample \mathfrak{L} sur \mathfrak{X} relatif à ce morphisme. Par le théorème d'annulation de Kodaira, il existe une suite croissante d'entiers $(b_s)_s$ telle que pour tout $s \geq 1$ et pour tout $i > 0$, on ait

$$H^i(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{F}_{s,1} \otimes \mathfrak{L}_1^{\otimes b_s}) = 0.$$

Si la suite (b_s) peut être prise stationnaire, il suffit de recopier la démonstration du th. A.1.2.2. On suppose donc la suite strictement croissante. Par dévissage on voit qu'on a pour tout $m \geq 1$:

$$H^i(\mathfrak{X}_m, \mathfrak{F}_{s,m} \otimes \mathfrak{L}_m^{\otimes b_s}) = 0$$

Il s'ensuit que pour chaque $m \geq 1$ et chaque $s \geq 1$ le complexe de Čech

$C_{s,m}$:

$$0 \rightarrow H^0(\mathfrak{X}_m, \mathfrak{F}_{s,m} \otimes \mathfrak{L}_m^{\otimes b_s}) \rightarrow \bigoplus_i H^0(U_{i,m}, \mathfrak{F}_{s,m} \otimes \mathfrak{L}_m^{\otimes b_s}) \rightarrow \bigoplus_{ij} H^0(U_{ij,m}, \mathfrak{F}_{s,m} \otimes \mathfrak{L}_m^{\otimes b_s}) \rightarrow \dots$$

est exact. On peut supposer que \mathfrak{L} est engendré par ses sections globales. Soit t une telle section. On a des morphismes $- \otimes t^{\otimes (b_{s+1} - b_s)} : \mathfrak{L}^{\otimes b_s} \rightarrow \mathfrak{L}^{\otimes b_{s+1}}$. D'où un morphisme de complexes $t^{\otimes (b_{s+1} - b_s)} : C_{s,m} \rightarrow C_{s+1,m}$. Pour tout $m \geq 1$, soit $\mathfrak{L}_m^{\otimes \infty t} = \varinjlim_s \mathfrak{L}_m^{\otimes b_s}$ pour $t' \mapsto t' \otimes t^{b_{s+1} - b_s}$. Cette limite ne dépend pas du choix de la suite strictement croissante des b_s . La limite inductive $C_{\infty,m} = \varinjlim_s C_{s,m}$ de ces résolutions est une résolution de

$$H^0(\mathfrak{X}_m, \mathfrak{F}_{s,m} \otimes \mathfrak{L}_m^{\otimes \infty t}).$$

Par Nakayama topologique, le complexe

$$C_{\infty, \infty} : \bigoplus_i H^0(U_i^f, \mathfrak{F} \otimes \widehat{\mathfrak{L}^{\otimes \infty_t}}) \rightarrow \bigoplus_{ij} H^0(U_{ij}^f, \mathfrak{F} \otimes \widehat{\mathfrak{L}^{\otimes \infty_t}}) \rightarrow \dots$$

est une résolution de $H^0(\mathfrak{X}, \mathfrak{F} \otimes \widehat{\mathfrak{L}^{\otimes \infty_t}})$ où

$$\widehat{\mathfrak{L}^{\otimes \infty_t}} = \varprojlim_m \mathfrak{L}_m^{\otimes \infty_t}.$$

En passant à la fibre générique et en utilisant le fait que le faisceau inversible $\mathfrak{L}[1/p]$ est donné sur l'affinoïde $X = \mathrm{Spm} B$ par un B -module L projectif de rang 1, on a pour tout ouvert affine V^f de \mathfrak{X} :

$$H^0(V^f, \mathfrak{F} \otimes \widehat{\mathfrak{L}^{\otimes \infty_t}})[1/p] = H^0(V^f, \mathfrak{F})[1/p] \widehat{\otimes}_B L\langle 1/t \rangle$$

où $L\langle 1/t \rangle = H^0(X, \widehat{\mathfrak{L}^{\otimes \infty_t}})$ désigne la complétion p -adique du B -module des sections sur X de $\mathfrak{L}^{\otimes \infty}$, qui s'identifie donc à la complétion p -adique de $\varinjlim_s L^{\otimes (b_{s+1} - b_s)}$. Si $L = B$, $t = b \in B$, on a $L\langle 1/t \rangle = B\langle 1/b \rangle$. On peut maintenant montrer que

$$C(U_{\bullet}^{\mathrm{rig}}, \mathcal{F}) : \bigoplus_i H^0(U_i^{\mathrm{rig}}, \mathcal{F}) \rightarrow \bigoplus_{ij} H^0(U_{ij}^{\mathrm{rig}}, \mathcal{F}) \rightarrow \dots$$

est une résolution de $H^0(X, \mathcal{F}) = H^0(\mathfrak{X}, \mathfrak{F})[1/p]$. On peut tensoriser le complexe $C(U_{\bullet}^{\mathrm{rig}}, \mathcal{F})$ par L . Il suffit de montrer qu'en tout idéal maximal \mathfrak{m} de B , $C(U_{\bullet}^{\mathrm{rig}}, \mathcal{F}) \otimes_B L_{\mathfrak{m}}$ est une résolution de $H^0(X, \mathcal{F}) \otimes_B L_{\mathfrak{m}}$. Comme \mathfrak{L} est engendré par ses sections globales sur A , $\mathfrak{L}^{\mathrm{rig}}$ est engendré par ses sections globales sur B ; il existe donc une section globale t qui ne s'annule pas en \mathfrak{m} ; on a donc $L_{\mathfrak{m}} = L\langle 1/t \rangle_{\mathfrak{m}}$ comme $B_{\mathfrak{m}}$ -modules, et on est ramené à l'énoncé déjà démontré : $C(U_{\bullet}^{\mathrm{rig}}, \mathcal{F}) \otimes_B L\langle 1/t \rangle$ est une résolution de $H^0(X, \mathcal{F}) \otimes_B L\langle 1/t \rangle$. \square

Démonstration. Soit $\mathfrak{G} = \mathcal{O}_{v,w,!}^{\kappa_u, f}$ et $\phi = \Pi_{I,v}^f \times \mathrm{Id}_{\mathcal{U}_u^f}$ et $\mathfrak{F} = \phi_* \mathfrak{G}$. Par le Th.9.2.3, c'est un faisceau de Banach formel sur le schéma formel admissible normal quasi-projectif $\mathfrak{X} = T_{I,v}^{*,f} \times \mathcal{U}_u^f$ dont la fibre générique X est affinoïde. Ce faisceau définit un faisceau rigide sur $X = T_{I,v}^{*,\mathrm{rig}} \times \mathcal{U}_u^{\mathrm{rig}}$.

Fixons un recouvrement admissible $\underline{U}^f = (U_{\alpha}^f)_{\alpha \in A}$ fini de $T_{I,v}^{*,f}$ par des ouverts affines dont les intersections sont affines. Le complexe de Čech augmenté sur $K = W[1/p]$:

$$H^0(T_{I,v}^{*,f} \times \mathcal{U}_u^f, \mathfrak{F})[1/p] \rightarrow C^0(\underline{U}^f \times \mathcal{U}_u^f, \mathfrak{F})[1/p] \rightarrow C^1(\underline{U}^f \times \mathcal{U}_u^f, \mathfrak{F})[1/p] \rightarrow \dots$$

est exact par le lemme précédent. Soit $\underline{\alpha} = (\alpha_0, \dots, \alpha_i) \in A^{i+1}$ et $U_{\underline{\alpha}}^f = \bigcap_{j=0}^i U_{\alpha_j}^f$. Montrons que le $\mathbf{A}(\mathcal{U}_u)$ -module $H^0(U_{\underline{\alpha}}^f \times \mathcal{U}_u^f, \mathfrak{F})[1/p]$ est orthonormalisable. La réduction modulo p de sa boule unité $H^0(U_{\underline{\alpha}}^f \times \mathcal{U}_u^f, \mathfrak{F})$ est le $\mathbf{A}(\mathcal{U}_{u,1})$ -module $H^0(U_{\underline{\alpha},1} \times \mathcal{U}_{u,1}, \mathfrak{F}_1)$. Ce module est libre sur $\mathbf{A}(\mathcal{U}_{u,1})$. En effet, $\mathbf{A}(\mathcal{U}_{u,1})$ est un anneau de polynômes sur un corps fini \mathbf{F} , donc son groupe multiplicatif coïncide avec \mathbf{F}^{\times} ; il s'ensuit que le caractère $\kappa_{u,1}$ est à valeurs dans \mathbf{F}^{\times} et est donc d'ordre premier à p . Ceci montre que le faisceau $\Omega_1^{\kappa_{u,1}}$ est de la forme $\widetilde{\Omega}_1^{\kappa_{u,1}} \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{U}_{u,1}}$ où $\widetilde{\Omega}_1^{\kappa_{u,1}}$ est le faisceau des sections de

$$\overline{T}_{N_0^+,1} \stackrel{T_0, \kappa_{u,1}}{\times} \mathbf{A}^1 \rightarrow \overline{T}_{N_0^+,1}$$

Formons

$$\widetilde{A}_1^{\kappa_{u,1}} = \pi_{B_0^+, I, 1, *} \widetilde{\Omega}_1^{\kappa_{u,1}}$$

et

$$\tilde{A}'_1 = \tilde{A}_1^{\kappa_{u,1}}(-D_1) \times_{\mathcal{C}(N_1^-, \tilde{A}_1^{\kappa_{u,1}}(-D_1))} \left(\mathcal{O}_{N^-(w)_1} \otimes \tilde{A}_1^{\kappa_{u,1}}(-D_1) \right).$$

On trouve

$$\mathfrak{F}_1 = \tilde{A}'_1 \otimes_{\mathbf{F}} \mathcal{O}_{\mathcal{U}_{u,1}}$$

Si l'on considère une base $(\bar{e}_j)_j$ sur \mathbf{F} de $\mathrm{H}^0(U_{\underline{\alpha},1}, \tilde{A}'_1)$, on voit que les $\bar{e}_j \otimes 1$ forment une base sur $\mathbf{A}(\mathcal{U}_{u,1})$ de $\mathrm{H}^0(U_{\underline{\alpha},1} \otimes \mathcal{U}_{u,1}, \mathfrak{F}_1)$.

En relevant une base de ce module, on obtient une base orthonormée de $\mathrm{H}^0(U_{\underline{\alpha}}^f, \times \mathcal{U}_u^f, \mathfrak{F})$ (par Nakayama topologique).

On a donc une résolution du $\mathbf{A}(\mathcal{U}_u)$ -module de Banach $S_{v,w}^{\kappa_u}(\Gamma_{B_{\mathrm{Sp}}}(p))$ par des modules de Banach orthonormalisables, avec morphismes continus. Ceci entraîne que ce module est projectif grâce au lemme ci-dessous.

□

LEMME 9.7.3. *Si $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ est une suite exacte de $\mathbf{A}(X)$ -modules et si M et M'' sont quasi-orthonormalisables, ou même seulement projectifs, alors M est projectif.*

Démonstration. En effet, si M et M'' sont quasi-orthonormalisables, soit (f_i) une base ortho-normale de M'' ; fixons des antécédents \tilde{e}_i des f_i . On a $|\tilde{e}_i| \geq C > 0$. Si on forme $e_i = \frac{\tilde{e}_i}{|\tilde{e}_i|}$, on obtient une base orthonormée dont l'image est une base de norme bornée. On peut donc, en changeant la norme de M'' par une norme équivalente, trouver une base orthonormée de M'' qui se relève en un système libre orthonormé de M ; il engendre topologiquement un relèvement topologique de M'' facteur direct de M' dans M , donc M' est projectif.

Si M et M'' sont seulement projectifs, on leur ajoute un facteur direct topologique commun assez grand pour se ramener à une suite exacte de noyau M' et où M et M'' sont quasi-orthonormalisables.

□

COROLLAIRE 9.7.4. *Soient v, w comme ci-dessus. Pour tout poids $\kappa \in \mathcal{U}_w(L)$, le morphisme :*

$$S_{v,w}^{\kappa_u}(\Gamma_{B_{\mathrm{Sp}}}(p)) \otimes_{\mathbf{A}(\mathcal{U}_u), \kappa} L \rightarrow S_{v,w}^{\kappa}(\Gamma_{B_{\mathrm{Sp}}}(p), L)$$

est un isomorphisme.

Démonstration. suit la méthode de démonstration de [AIP, Cor.8.2.3.2]. Considérons l'idéal maximal \mathcal{I}_{κ} de $\mathcal{O}_{\mathcal{U}_u}$ des fonctions qui s'annulent au point κ , et $\mathrm{I}_{\kappa} = \mathrm{H}^0(\mathcal{U}_u, \mathcal{I}_{\kappa})$. Formons la résolution de Koszul :

$$\mathrm{Kos}(\kappa): 0 \rightarrow A \rightarrow A^g \rightarrow \cdots \rightarrow A^g \rightarrow A \rightarrow A/\mathrm{I}_{\kappa} \rightarrow 0$$

On a une suite exacte de faisceaux sur $\overline{T}_{I,v}^{\mathrm{rig}} \times \mathcal{U}_u$:

$$0 \rightarrow \mathcal{I}_{\kappa} \cdot \mathcal{O}_{v,w,!}^{\kappa_u} \rightarrow \mathcal{O}_{v,w,!}^{\kappa_u} \rightarrow \mathcal{O}_{v,w,!}^{\kappa} \rightarrow 0$$

Par annulation de $\mathrm{R}^1(\Pi_I \times \mathrm{Id}_{\mathcal{U}_u})_* \mathcal{O}_{v,w,!}^{\kappa_u}$ sur $T_{I,v}^{*,\mathrm{rig}}$, on a encore une suite exacte de faisceaux sur $T_{I,v}^{*,\mathrm{rig}} \times \mathcal{U}_u$:

$$0 \rightarrow \mathcal{I}_{\kappa} \cdot \Pi_{I,*} \mathcal{O}_{v,w,!}^{\kappa_u} \rightarrow \Pi_{I,*} \mathcal{O}_{v,w,!}^{\kappa_u} \rightarrow \Pi_{I,*} \mathcal{O}_{v,w,!}^{\kappa} \rightarrow 0$$

Soit $\mathcal{F}^{\kappa_u} = (\Pi_I \times \mathrm{Id}_{\mathcal{U}_u})_* \mathcal{O}_{v,w,!}^{\kappa_u}$ et $\mathcal{F}^{\kappa} = \Pi_{I,*} \mathcal{O}_{v,w,!}^{\kappa}$. On a donc $\mathcal{O}_{\mathcal{U}_u}/\mathcal{I}_{\kappa} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{U}_u}} \mathcal{F}^{\kappa_u} \cong \mathcal{F}^{\kappa}$.

On forme le produit tensoriel $\mathrm{Kos}(\kappa) \otimes_A \mathrm{H}^0(T_{I,v}^{*,\mathrm{rig}} \times \mathcal{U}_u, \mathcal{F}^{\kappa_u})$. On va montrer qu'il induit un isomorphisme de L -espaces de Banach

$$A/\mathrm{I}_{\kappa} \otimes_A \mathrm{H}^0(T_{I,v}^{*,\mathrm{rig}} \times \mathcal{U}_u, \mathcal{F}^{\kappa_u}) \cong \mathrm{H}^0(T_{I,v}^{*,\mathrm{rig}}, \mathcal{F}^{\kappa})$$

On fixe un recouvrement affine $\underline{U}^f = (U_i^f)_i$ du modèle formel $T_{I,v}^{*,f}$ de $T_{I,v}^{*,\text{rig}}$. On sait par le lemme 9.7.2 qu'on a des résolutions de Čech

$$C^\bullet(\underline{U}^{\text{rig}} \times \mathcal{U}_u, \mathcal{F}^{\kappa_u}):$$

$$H^0(T_{I,v}^{*,\text{rig}} \times \mathcal{U}_u, \mathcal{F}^{\kappa_u}) \rightarrow \bigoplus_i H^0(U_i^{\text{rig}} \times \mathcal{U}_u, \mathcal{F}^{\kappa_u}) \rightarrow \bigoplus_{ij} H^0(U_{ij} \times \mathcal{U}_u, \mathcal{F}^{\kappa_u}) \rightarrow \dots$$

et

$$C^\bullet(\underline{U}^{\text{rig}}, \mathcal{F}^\kappa): H^0(T_{I,v}^{*,\text{rig}}, \mathcal{F}^\kappa) \rightarrow \bigoplus_i H^0(U_i^{\text{rig}}, \mathcal{F}^\kappa) \rightarrow \bigoplus_{ij} H^0(U_{ij}, \mathcal{F}^\kappa) \rightarrow \dots$$

On tensorise la première résolution par la résolution de Koszul et on obtient un complexe double

$$\text{Kos}(\kappa) \otimes_A C^\bullet(\underline{U}^{\text{rig}} \times \mathcal{U}_u, \mathcal{F}^{\kappa_u})$$

où l'on place verticalement les flèches de $\text{Kos}(\kappa)$ et horizontalement celles du complexe de Čech. Chaque ligne est exacte parce que les termes du complexe de Koszul sont A -libres. Chaque colonne est exacte parce que pour chaque multi-indice α chaque A -module $H^0(U_\alpha^{\text{rig}} \times \mathcal{U}_u, \mathcal{F}^{\kappa_u})$ est projectif, donc plat sur A . De plus, comme U_α^{rig} est affine, le morphisme

$$H^0(U_\alpha^{\text{rig}} \times \mathcal{U}_u, \mathcal{F}^{\kappa_u}) \rightarrow H^0(U_\alpha^{\text{rig}}, \mathcal{F}^\kappa)$$

induit par $A \rightarrow A/I_\kappa$ est surjectif et induit un isomorphisme d'espaces de Banach en tensorisant le terme de gauche par A/I_κ . On en déduit par chasse au diagramme que la première colonne du complexe double est exacte. C'est-à-dire que le morphisme continu d'espaces de Banach

$$A/I_\kappa \otimes_A H^0(T_{I,v}^{*,\text{rig}} \times \mathcal{U}_u, \mathcal{F}^{\kappa_u}) \rightarrow H^0(T_{I,v}^{*,\text{rig}}, \mathcal{F}^\kappa)$$

est un isomorphisme. \square

10. Opérateurs de Hecke

10.1 Opérateurs de Hecke hors de Np

Soit ℓ un nombre premier, premier à Np . Considérons les matrices $\alpha_i = \text{diag}(I_{g-i}, \ell I_i) \in \text{GL}_g(\mathbf{Q})$ pour $i = 0, \dots, g-1$, et, pour $i = 1, \dots, g-1$, $\beta_i = \text{diag}(\alpha_i, \ell^2 \cdot {}^t\alpha_i^{-1}) \in \text{Sp}_{2g}(\mathbf{Q})$, et $\beta_0 = \text{diag}(I_g, \ell \cdot I_g) \in \text{Sp}_{2g}(\mathbf{Q})$. Soit $\Gamma_i = \Gamma \cap \beta_i^{-1} \Gamma \beta_i$, et X_i la variété de Siegel de niveau Γ_i sur \mathbf{Z}_p . Si $i = 0$, cette variété classe les quadruplets (A, λ, ϕ, H_0) , où ϕ est une structure de niveau N modulo Γ , et H_0 est un sous-groupe fini étale lagrangien de $A[\ell]$; si $i = 1, \dots, g-1$, X_i classe les quadruplets (A, λ, ϕ, H_i) , où ϕ est une structure de niveau N modulo Γ , et H_i est un sous-schéma en groupes fini étale d'ordre ℓ^{2g} de $A[\ell^2]$, totalement isotrope pour l'accouplement de Weil $\bigwedge^2 A[\ell^2] \mapsto \mu_{\ell^2}$, et tel que son sous-groupe de ℓ -torsion $H_i[\ell]$ soit de rang ℓ^{g+i} ; notons qu'alors $K_i = \ell \cdot H_i$ est un sous-schéma en groupes fini et plat de rang ℓ^{g-i} de H_i ; le schéma abélien $A/H_i[\ell]$ contient $H'_i = H_i/H_i[\ell]$, et l'isogénie $A/H_i[\ell] \rightarrow A$ induite par la multiplication par ℓ sur A induit un isomorphisme de schémas en groupes $H'_i \rightarrow K_i$. Considérons le modèle canonique sur \mathbf{Z}_p de la variété de Siegel de niveau parahorique $X_{P_i^o}(\ell)$ associée au parabolique maximal P_i^o , opposé au parabolique standard de Levi $\text{GL}_{g-i} \times \text{Sp}_{2i}$. Le morphisme $(A, \lambda, \phi, H_i) \mapsto (A, \lambda, \phi, H_i[\ell])$ induit un morphisme fini et plat $X_i \rightarrow X_{P_i^o}(\ell)$.

Notons que le schéma abélien A/H_i est principalement polarisé. Pour tout $i = 0, \dots, g-1$, X_i est donc muni d'une isogénie universelle $\varphi_i: A \rightarrow A/H_i$ entre deux schémas abéliens principalement polarisés, et le schéma X_i est donc muni de deux morphismes finis étales

$p_j : X_i \rightarrow X, j = 1, 2$, donnés par $(A, \lambda, \phi, H_i) \mapsto (A, \lambda, \phi)$, resp. $(A, \lambda, \phi, H_i) \mapsto (A/H_i, \lambda_i, \phi_i)$, où λ_i et ϕ_i sont induits par λ et ϕ . On voit que pour tout $x \in X_i^{\text{rig}}(L)$, $\text{Hdg}(p_j(x)) = \text{Hdg}(x)$, de sorte qu'on obtient par restriction des morphismes $p_j : X_i^{\text{rig}}(v) \rightarrow X^{\text{rig}}(v)$.

On considère la tour d'Igusa v -surconvergente $T_{i,\infty,v}$ au-dessus de $X_i^{\text{rig}}(v)$ associée au faisceau lisse $\mathbb{L}(A/X_i)$ sur $X_i^{\text{rig}}(v)$. L'isogénie étale $\varphi_i : A \rightarrow A/H_i$ induit, par functorialité covariante de \mathbb{L} (voir [BM10, Section 6]) un isomorphisme $\mathbb{L}(\varphi_i) : \mathbb{L}(A/X_i) \rightarrow \mathbb{L}((A/H_i)/X_i)$. On prolonge alors les morphismes $p_j, j = 1, 2$, en des morphismes $p_j : T_{i,\infty,v} \rightarrow T_{\infty,v}$ qui envoient un quintuplet $(A, \lambda, \phi, H_i, \psi)$ défini sur S vers (A, λ, ϕ, ψ) , resp. $(A/H_i, \lambda_i, \phi_i, \psi_i)$, où $\psi_i : \mu_{p^\infty} \rightarrow \mathbb{L}((A/H_i)/S)$ est le composé de $\psi : \mu_{p^\infty}^g \rightarrow \mathbb{L}(A/S)$ et de $\mathbb{L}(\varphi_i)$. Les morphismes p_j ainsi prolongés sont finis étales. On définit des endomorphismes $T_{\ell,i}$ des faisceaux $\mathcal{O}_{v,w}^u, \mathcal{O}_{v,w}^{\kappa_u}$ comme la composée $(p_1)_* \circ p_2^*$. Ils sont compatibles avec les opérateurs habituels $T_{\ell,i}$ définis sur X et sur la tour d'Igusa ordinaire par les mêmes formules (voir par exemple [Til12, 8.1] pour $g = 2$). Ils respectent donc la cuspidalité et l'intégralité des modèles formels obtenus par clôture intégrale du modèle formel d'Andreatta-Gasbarri $X^f(v)$. Ils fournissent donc des endomorphismes continus $T_{\ell,i}, i = 0, \dots, g-1$, des $\mathbf{A}(\mathcal{U}_u)$ -modules de Banach $S_{v,w}^{\kappa_u}(\Gamma)$, appelés opérateurs de Hecke en ℓ .

10.2 L'opérateur U_p et sa théorie spectrale

On va définir un endomorphisme continu U_p du $\mathbf{A}(\mathcal{U}_u)$ -module de Banach $M_{v,w}^{\kappa_u}$ respectant $S_{v,w}^{\kappa_u}$ et tel que pour tout $v > 0$ assez petit et pour tout $w \geq u > 0$, $U_p(S_{v,w}^{\kappa_u}) \subset S_{pv,w+1}^{\kappa_u}$, ce qui entraînera sa complète continuité. L'endomorphisme U_p est défini comme un produit d'endomorphismes $U_{p,i}$ ($i = 0, 1, \dots, g-1$) de $M_{v,w}^{\kappa_u}$ provenant de correspondances algébriques sur $T_{\infty,v}$.

Pour $i \in \{0, 1, \dots, g-1\}$, on considère les matrices $\alpha_i = \text{diag}(I_{g-i}, pI_i) \in \text{GL}_g(\mathbf{Q})$ et les matrices $\beta_i = \text{diag}(\alpha_i, p^2\alpha_i^{-1}) \in \text{GSp}_{2g}(\mathbf{Q})$ pour $i \in \{1, \dots, g-1\}$, et $\beta_0 = \text{diag}(I_g, pI_g) \in \text{GSp}_{2g}(\mathbf{Q})$.

Soit \mathbb{H} le semi-groupe commutatif engendré dans $\text{M}_{2g}(\mathbf{Z})$ par les β_i pour $i \in \{0, 1, \dots, g-1\}$. Soit $\beta = \text{diag}(\alpha, \nu \cdot {}^t\alpha^{-1}) \in \mathbb{H}$, où $\nu = \nu(\beta) \in \mathbf{Z}$. Rappelons qu'on a défini, pour tout $r \geq 1$, les quotients $T_{N_0^+, r, v} = T_{r,v}/N_0^+$ qui classifient les drapeaux complets dans \mathbb{L}_r munis d'une trivialisation du gradué associé; on introduit aussi $N_0^+(\beta) = \alpha^{-1}N_0^+\alpha \cap N_0^+$ et pour tout $r \geq 1$, $T_{N_0^+(\beta), r, v} = T_{r,v}(\beta)/N_0^+(\beta)$, où pour tout $r \geq 1$, $T_{r,v}(\beta)$ désigne le $X^{\text{rig}}(v)$ -espace rigide classifiant les $(A \xrightarrow{\pi} A', \psi_r, \psi'_r)$ où A et A' sont des variétés abéliennes principalement polarisées à bonne réduction, ψ_r resp. ψ'_r est une base de $\mathbb{L}_r(A)$, resp. de $\mathbb{L}_r(A')$, et π est une p -isogénie de facteur de similitude $\nu(\beta)$ (relativement aux accouplements de Weil de A et A') et telle qu'il existe (étale localement) des bases ψ et ψ' de $\mathbb{L}(A)(-1)$, resp. $\mathbb{L}(A')(-1)$, relevant ψ_r resp. ψ'_r telles qu'en notant $\mathbb{L}(\pi) : \mathbb{L}(A) \rightarrow \mathbb{L}(A')$ l'image de π par le foncteur covariant \mathbb{L} ([BM10, Section 8]), la matrice de $\mathbb{L}(\pi)(-1)$ soit égale à α ; autrement dit, $\mathbb{L}(\pi)(-1) \circ \psi = \psi' \circ \alpha$.

Le quotient $T_{N_0^+(\beta), r, v}$ classe donc les $(A \xrightarrow{\pi} A', \psi_r \circ N_0^+, \psi'_r \circ N_0^+)$ avec $\pi, \psi_r, \psi'_r, \psi, \psi'$ comme ci-dessus, tels que $\mathbb{L}(\pi)(-1) \circ \psi \in \psi' \circ \alpha N_0^+$ (on voit aisément que cette condition ne dépend pas du choix des représentants de $\psi \circ N_0^+$ et $\psi' \circ N_0^+$). On sait [FT10, Sect.8.2.3, Th.8 (2)] que pour tout sous-groupe lagrangien H' de $A[p]$ tel que $H' \cap H_1 = 0$, $\text{Hdg}(A/H') = p^{-1}\text{Hdg}(A)$, de sorte que si $\text{Hdg}(A) \leq v$, $\text{Hdg}(A/H') \leq v/p$. On définit les projections $p_1 : T_{N_0^+(\beta), r, v} \rightarrow T_{N_0^+, r, v}$ et $p_2 : T_{N_0^+(\beta), r, v} \rightarrow T_{N_0^+, r, v/p}$ par

$$p_1 : (\pi, \psi_r \circ N_0^+, \psi'_r \circ N_0^+) \mapsto (A, \psi_r \circ N_0^+), \quad p_2 : (\pi, \psi_r \circ N_0^+, \psi'_r \circ N_0^+) \mapsto (A', \psi'_r \circ N_0^+).$$

Ces morphismes sont finis étales.

Pour $i \in \{0, 1, \dots, g-1\}$ fixé, soit $\beta = \beta_i$; on pose $\alpha'_i = p\alpha_i^{-1}$; soit $S_g(\mathbf{Z}_p)$ le \mathbf{Z}_p -module des matrices symétriques $g \times g$ et $m_\beta = (S_g(\mathbf{Z}_p) : \alpha'_i S_g(\mathbf{Z}_p) \alpha'_i)$. On définit alors pour chaque $r \geq 1$ l'opérateur $U_{p,i}(r)$ comme la composée de la restriction

$$\text{res}_{v,v/p} : H^0(T_{r,v}, \mathcal{O}_{T_{r,v}}^{N_0^+}) \rightarrow H^0(T_{r,v/p}, \mathcal{O}_{T_{r,v/p}}^{N_0^+})$$

avec

$$\frac{1}{m_\beta} p_{1,*} \circ p_2^* : H^0(T_{r,v/p}, \mathcal{O}_{T_{r,v/p}}^{N_0^+}) \xrightarrow{p_2^*} H^0(T_{r,v}(\beta), \mathcal{O}_{T_{r,v}(\beta)}^{N_0^+}) \xrightarrow{\frac{1}{m_\beta} p_{1,*}} H^0(T_{r,v}, \mathcal{O}_{T_{r,v}}^{N_0^+})$$

On obtient ainsi un endomorphisme continu de $H^0(T_{N_0^+,r,v}, \mathcal{O}_{T_{N_0^+,r,v}})$.

REMARQUE 10.2.1. Notons que cette définition ne nécessite pas de propriété de compatibilité du faisceau \mathbb{L} au pull-back par le morphisme de Frobenius $\phi : X(\frac{v}{p}) \rightarrow X(v)$ contrairement à la situation de [AIP].

LEMME 10.2.2. (1) Les opérateurs $U_{p,i}(r)$ et $U_{p,i}(r+1)$ sont compatibles avec les inclusions $H^0(T_{r,v}, \mathcal{O}_{T_{r,v}}^{N_0^+}) \hookrightarrow H^0(T_{r+1,v}, \mathcal{O}_{T_{r+1,v}}^{N_0^+})$

(2) Pour tout $i = 0, \dots, g-1$, $U_{p,i}$ respecte la structure entière standard $H^0(T_{N_0^+,v}^f, \mathcal{O}_{T_{N_0^+,v}^f})$

de $H^0(T_{\infty,v}, \mathcal{O}_{T_{\infty,v}}^{N_0^+})$.

(3) Pour tout $v, w \geq u > 0$ et pour tout $\kappa \in \mathcal{U}_u(L)$, les opérateurs $U_{p,i}$ induisent des endomorphismes continus du sous-espace $S_{v,w}^{\kappa}(\Gamma, L)$ de la complétion p -adique de $H^0(T_{\infty,v}, \mathcal{O}_{T_{\infty,v}})$

(4) il induit un endomorphisme continu $\mathbf{A}(\mathcal{U}_u)$ -linéaire de $S_{v,w}^{\kappa_u}$ muni de la norme $|\cdot|_{v,w}^u$.

Démonstration. (1) Un calcul matriciel semblable à (la démonstration de) [Hid02, Prop.3.5] montre que les morphismes $p_1 : T_{N_0^+(\beta),r,v} \rightarrow T_{N_0^+,r,v}$ et $p_2 : T_{N_0^+(\beta),r,v} \rightarrow T_{N_0^+,r,v}$ pour $r \geq 1$, forment un morphisme de systèmes projectifs; les correspondances $U_{p,i}(r)$ sont donc compatibles quand r varie.

(2) On définit $T_{N_0^+(\beta),\infty,v}^f$ par clôture intégrale du \mathcal{O}_K -schéma formel $X^f(v)$ dans $T_{N_0^+(\beta),\infty,v}$; les morphismes $p_1 : T_{N_0^+(\beta),v} \rightarrow T_{N_0^+,v}$, et $p_2 : T_{N_0^+(\beta),\infty,v} \rightarrow T_{N_0^+,v/p}$ fournissent alors par restriction des morphismes finis $p_1^f : T_{N_0^+(\beta),v}^f \rightarrow T_{N_0^+,v}^f$ et $p_2^f : T_{N_0^+(\beta),v}^f \rightarrow T_{N_0^+,v/p}^f$. La formule $\frac{1}{m_\beta} p_{1,*} \circ p_2^* \circ \text{res}_{v,v/p}^f$ définit un morphisme $U_{p,i} : H^0(T_{N_0^+,v}^f, \mathcal{O}_{T_{N_0^+,v}^f}) \rightarrow H^0(T_{N_0^+,v}^f, \mathcal{O}_{T_{N_0^+,v}^f})[p^{-1}]$.

Pour voir qu'il respecte l'intégralité, on utilise le principe du q -développement 7.3.3 et [Hid02, Proposition 3.5] qui montre que pour tout $f \in H^0(T_{N_0^+,v}^f, \mathcal{O}_{T_{N_0^+,v}^f})$ et pour tout $i = 0, \dots, g-1$,

on a $\Phi_P^*(U_{p,i}(f)) \in \widehat{\mathcal{O}_K((q^T))}$. On pourrait aussi utiliser [Pill12, Appendice A.1].

(3) et (4) se démontrent simultanément : il résulte de (2) que l'endomorphisme $U_{p,i}$ de $H^0 = H^0(T_{\infty,v}, \mathcal{O}_{T_{\infty,v}}^{N_0^+})$ se prolonge par continuité à la complétion p -adique \widehat{H}^0 . Pour tout $v, w, u > 0$, montrons que $U_{p,i}$ respecte le sous-espace $M_{v,w}^\kappa$ de \widehat{H}^0 et qu'il induit un endomorphisme continu pour la norme $|\cdot|_{v,w}^u$.

En désignant par $\widehat{R}_\infty(\beta)$ la complétion p -adique de la clôture intégrale de R dans $T_{N_0^+(\beta),\infty,v}$, et en notant $(\pi_u, \psi_u \circ N_0^+, \psi'_u \circ N_0^+)$ le triplet universel défini sur $\widehat{R}_\infty(\beta)$, on peut poser pour $f \in \widehat{R}_\infty(\beta)$ et $g \in I$, $f(A, g) = f(A, \psi_u \circ g)$. Considérons un système de représentants ϵ_j ,

resp. η_k , de $N_0^+(\beta) \setminus N_0^+$, resp. de $U(\mathbf{Z}_p)/\alpha'_i U(\mathbf{Z}_p)\alpha'_i$. Pour tout couple (j, k) , on note $H'_{j,k}$ le sous-schéma en groupes fini et plat de A associé à $\epsilon_j \eta_k$, c'est à dire tel que l'isogénie $\pi_{j,k}: A \rightarrow A/H'_{j,k}$ satisfait $\mathbb{L}(\pi_{j,k})(\psi_u) = \psi'_u \circ \alpha \epsilon_j \eta_k$. Notons que l'intersection $H'_{j,k} \cap H_1$ de $H'_{j,k}$ avec le sous-groupe canonique H_1 est d'ordre p^i . On pose $\widetilde{f}_{j,k}(A/H'_{j,k}, g') = f(A/H'_{j,k}, \psi'_u \circ g')$. Si pour chaque $H'_{j,k}$, on pose $g'_{j,k} = \alpha \eta_k \epsilon_j g \alpha^{-1}$, on a

$$\widetilde{p_{1,*} p_2^* f}(A, g) = \sum_{j,k} \widetilde{f}_{j,k}(A/H'_{j,k}, g'_{j,k}). \quad (1)$$

On sait que

$$\alpha N^-(w) \alpha^{-1} \subset N^-(w), \quad (2)$$

on voit que si $\widetilde{f}(A, g)$ se prolonge à $N^-(w) \times T(u)$, il en est de même pour $\widetilde{p_{1,*} p_2^* f}(g)$.

De plus, en revenant à la définition 7.3.4, on voit immédiatement que si f est cuspidale, les fonctions $\widetilde{f}_{j,k}$ sont aussi cuspidales et donc $U_{p,i} f$ l'est aussi. \square

Posons alors $U_p = U_{p,0} U_p^{(0)}$ où $U_p^{(0)} = \prod_{i=1}^{g-1} U_{p,i}$.

PROPOSITION 10.2.3. (1) Pour tout $v < \frac{1}{2p}$, l'opérateur $U_{p,0}$ envoie $S_{v/p,w}^{\kappa_u}$ dans $S_{v,w}^{\kappa_u}$,

(2) Pour tout $v < \frac{1}{2}$ et pour tout $w \geq u$, l'opérateur $U_p^{(0)}$ envoie $S_{v,w+1}^{\kappa_u}$ dans $S_{v,w}^{\kappa_u}$;

(3) Pour tout $v < \frac{1}{2p}$, l'opérateur U_p induit un endomorphisme complètement continu du $\mathbf{A}(\mathcal{U}_u)$ -modules de Banach $S_{v,w}^{\kappa_u}$.

Démonstration. (1) On applique la formule 1 avec $i = 0$. On sait [FT10, Th.8.2.3, (2)] que pour tout sous-groupe lagrangien H' de $A[p]$ tel que $H' \cap H_1 = 0$, $\text{Hdg}(A/H') = p^{-1} \text{Hdg}(A)$, de sorte que si $\text{Hdg}(A) \leq v$, $\text{Hdg}(A/H') \leq v/p$. Ainsi, si f est v/p -surconvergente, $U_{p,0}(f)$ est v -surconvergente.

(2) La formule 2 appliquée à $\alpha = \prod_{i=1}^{g-1} \alpha_i$ est renforcée en $\alpha N^-(w) \alpha^{-1} \subset N^-(w+1)$. Ceci montre que si $\widetilde{f}(g)$ est analytique sur $N^-(w+1)$, la fonction $\widetilde{p_{1,*} p_2^* f}(g)$ est analytique sur $N^-(w)$.

(3) On écrit U_p comme la composée de la restriction $S_{v,w}^{\kappa_u} \rightarrow S_{v/p,w+1}^{\kappa_u}$, qui est complètement continue par 7.4.4, et du morphisme continu $S_{v/p,w+1}^{\kappa_u} \rightarrow S_{v,w}^{\kappa_u}$ donné par (1) et (2). La composée d'un morphisme continu et d'un morphisme complètement continu est complètement continue [Buz07, Lemma 2.7]. \square

DÉFINITION 10.2.4. On note encore $U_p = \prod_{i=0}^{g-1} U_{p,i}$ l'endomorphisme complètement continu du $\mathbf{A}(\mathcal{U}_u)$ -modules de Banach $S_{v,w}^{\kappa_u}(\Gamma)$, resp. du L -espace de Banach $S_{v,w}^{\kappa}(\Gamma_{B_{\text{Sp}}}(p), L)$, pour chaque $\kappa \in \mathcal{U}_u(L)$.

PROPOSITION 10.2.5. Les morphismes $\text{HTI}^*: S^k(\Gamma_{B_{\text{Sp}}}(p)) \rightarrow S_{v,w}^k(\Gamma_{B_{\text{Sp}}}(p))$ et $\text{HTI}^*: S_{v,w}^{\kappa, \text{AIP}} \rightarrow S_{v,w}^{\kappa}(\Gamma_{B_{\text{Sp}}}(p))$ définis en 8.1.3 sont compatibles aux opérateurs de Hecke $T_{\ell,i}$, $i = 0, \dots, g-1$ et U_p .

Démonstration. Les opérateurs de Hecke $T_{\ell,i}$ et U_p définis ci-dessus sont compatibles aux opérateurs de Hecke définis par Hida sur le lieu ordinaire ([Hid02, Sect.3.6 et 6.5] ou [Pil12, Appendice A], voir aussi [Til12, 8.1]) . On en déduit que ces opérateurs respectent la cuspidalité, et d'autre part que les morphismes HTI^* sont équivariants pour les opérateurs de Hecke. \square

10.3 Contrôle et classicité

Pour tout $\kappa \in \mathcal{U}_u(L)$, et pour chaque $\underline{\alpha} = (\alpha_0, \dots, \alpha_{g-1}) \in (\mathbf{R}^+)^g$, on considère $(S_{v,w}^\kappa)^{\leq \underline{\alpha}}(\Gamma, L)$ le L -sous-espace vectoriel où les valeurs propres généralisées des opérateurs commutant mutuellement $U_{p,i}$ ($i = 0, \dots, g-1$) sont de valuation $\leq \alpha_i$.

On rappelle un résultat de classicité démontré pour l'espace des formes surconvergentes $(S_{v,w}^k)^{\leq \underline{\alpha}}(\Gamma_{B_{\text{Sp}}}(p), L)$ par B. Stroth et V. Pilloni dans [PS]. :

COROLLAIRE 10.3.1. *Si $k = (k_1, \dots, k_g)$ est un poids classique tel que $k_g > \frac{g(g+1)}{2}$ et si $\alpha_0 < k_g - \frac{g(g+1)}{2}$ et $\alpha_i < k_{g-i} - k_{g-i+1} + 1$ ($i = 1, \dots, g-1$), le morphisme de restriction de $X_{B_{\text{Sp}}}(p)^{\text{rig}}$ à $T_{I,v}$ induit une identification Hecke-équivariante (pour les opérateurs hors de N) :*

$$S^{k, \leq \underline{\alpha}}(\Gamma_{B_{\text{Sp}}}(p), L) = (S_{v,w}^k)^{\leq \underline{\alpha}}(\Gamma_{B_{\text{Sp}}}(p), L).$$

On en déduit

COROLLAIRE 10.3.2. *Si $k = (k_1, \dots, k_g)$ est un poids classique tel que $k_g > \frac{g(g+1)}{2}$ et si $\alpha_0 < k_g - \frac{g(g+1)}{2}$ et $\alpha_i < k_{g-i} - k_{g-i+1} + 1$ ($i = 1, \dots, g-1$), pour tout $v < \frac{1}{2p}$ et tout $w \geq u > 0$, l'épimorphisme Hecke-équivariant (pour les opérateurs de Hecke hors de N)*

$$S_{v,w}^{\kappa_u}(\Gamma_{B_{\text{Sp}}}(p), L) \otimes_{\mathbf{A}(\mathcal{U}_u), k} L \rightarrow S_{v,w}^k(\Gamma_{B_{\text{Sp}}}(p), L)$$

induit un isomorphisme Hecke-équivariant

$$(S_{v,w}^{\kappa_u}(\Gamma_{B_{\text{Sp}}}(p)) \otimes_{\mathbf{A}(\mathcal{U}_u), k} L)^{\leq \underline{\alpha}} = S^{k, \leq \underline{\alpha}}(\Gamma_{B_{\text{Sp}}}(p), L).$$

Démonstration. Lorsque $v < \frac{1}{2p^{n-1}}$, $u = w$ et $n-1 < w < n - v \frac{p^n-1}{p-1}$, on peut le déduire du théorème de contrôle de [AIP] en utilisant le théorème de comparaison de 8.2 et la Proposition 10.2.5 qui permettent d'identifier $(S_{v,w}^{\kappa_u})^{\leq \underline{\alpha}}(\Gamma_{B_{\text{Sp}}}(p), L)$ avec $(S_{v,w}^{\kappa_u, \text{AIP}})^{\leq \underline{\alpha}}(\Gamma_{B_{\text{Sp}}}(p), L)$ en tant que modules pour l'action de l'algèbre de Hecke hors de N .

Lorsque $v < \frac{1}{2p}$, pour tout $w \geq u > 0$, nous pouvons donner une démonstration indépendante de celle de [AIP] en utilisant notre théorème de contrôle 9.7.4 et la Proposition 10.2.5. \square

11. Variétés de Hecke

Rappelons que des variétés de Hecke \mathcal{X}^{Urb} (voir [Urb11]) et \mathcal{X}^{AIP} (voir [AIP]) pour Sp_{2g} , munies de morphismes de poids κ vers \mathcal{W} ont été construites par E. Urban [Urb11] et Andreatta-Iovita-Pilloni [AIP]. La première classifie les systèmes de valeurs propres de Hecke cohomologiques de niveau $\Gamma \cap \Gamma_B(p^\infty)$ de pente finie, et la seconde les systèmes de valeurs propres de formes de Siegel holomorphes de niveau $\Gamma \cap \Gamma_B(p^\infty)$ de pente finie. Les considérations des sections précédentes permettent de construire une variété de Hecke \mathcal{X}^{BMT} classifiant aussi les systèmes de valeurs propres de formes de Siegel holomorphes de niveau $\Gamma \cap \Gamma_B(p^\infty)$ de pente finie. Pour la construire, on utilise le formalisme de [Buz07, Section 5] appliqué au triplet $(\text{Sp}_{2g}, \Gamma, \phi)$, où $\phi = U_p$.

Soit \mathbf{T} l'algèbre de Hecke abstraite hors de N , définie comme l'algèbre de polynômes engendrée sur \mathbf{Z} par des indéterminées $T_{\ell,i}$ pour tout premier ℓ ne divisant pas Np et tout $i = 0, \dots, g-1$, et une indéterminée U_p . On considère pour chaque ouvert affinoïde \mathcal{U}_u de \mathcal{W} la famille de $\mathbf{A}(\mathcal{U}_u)$ -modules de Banach projectifs $(S_{v,w}^{\kappa_u}(\Gamma))_{v,w}$ munis de l'opérateur complètement continu $\phi = U_p$ défini en 10.2.4 ; on considère les séries caractéristiques $P_{v,w}^u(T) =$

$\det(I - T\phi; S_{v,w}^{\kappa_u}(\Gamma)) \in \mathbf{A}(\mathcal{U}_u)\{\{T\}\}$. Les lieux $Z_{v,w,\phi}^u$ des zéros de $P_{v,w}^u(T)$ dans $\mathcal{U}_u \times \mathbb{G}_m$ se recollent quand $v \rightarrow 0$ et $w \rightarrow \infty$, et fournit la variété spectrale Z_ϕ^u qui paramétrise les inverses des valeurs propres non-nulles de ϕ . Le morphisme de projection $\pi: Z_\phi^u \rightarrow \mathcal{U}_u$ est localement fini et plat [Buz07, Cor.4.2]. On définit alors la variété de Hecke $D_{v,w,\phi}^u$ comme « le spectre » $\mathrm{Spm} \mathbf{T}_{v,w}^u$ de l'image $\mathbf{T}_{v,w}^u$ de la représentation naturelle de $\mathbf{A}(\mathcal{U}_u) \otimes \mathbf{T}$ dans $\mathrm{End}_{\mathbf{A}(\mathcal{U}_u)}(S_{v,w}^{\kappa_u})$ (à cause du rang infini de $S_{v,w}^{\kappa_u}$ sur $\mathbf{A}(\mathcal{U}_u)$, il faut en fait procéder comme dans [Buz07, Section 5]). Ces variétés sont munies de morphismes d'algèbres $\theta_{v,w}^u: \mathbf{T} \rightarrow \mathcal{O}_{D_{v,w,\phi}^u}$ compatibles quand v, w, u varient, appelés systèmes de valeurs propres de Hecke universels; de plus, on a un faisceau quasi-cohérent d'espaces de Banach $\mathcal{S}_{v,w}^u \rightarrow D_{v,w,\phi}^u$ donné par le $\mathbf{T}_{v,w}^u$ -module $S_{v,w}^{\kappa_u}$. Les variétés $D_{v,w,\phi}^u$ se recollent quand v, w et u varient. Comme les ouverts affinoïdes \mathcal{U}_u forment un recouvrement de \mathcal{W} , on obtient ainsi une variété rigide sur K munie d'un morphisme d'algèbres $\theta: \mathbf{T} \rightarrow \mathcal{O}_{D_\phi}$, d'un morphisme analytique $\kappa: D_\phi \xrightarrow{f} Z_\phi \xrightarrow{\pi} \mathcal{W}$ localement fini, et d'un fibré \mathcal{S} , avec les propriétés

- D_ϕ est équidimensionnelle de dimension g ;
- f est fini et tel que toute composante irréductible de D_ϕ s'envoie surjectivement par f sur une composante irréductible de Z_ϕ ;
- l'image par $\kappa = \pi \circ f$ d'une composante irréductible de D_ϕ est Zariski-dense dans \mathcal{W} .

DÉFINITION 11.0.3. Pour tout ouvert affinoïde Y de D_ϕ , l'espace $H^0(Y, \mathcal{S})$ est appelé espace des Y -familles de formes propres de Siegel surconvergentes.

Pour toute extension finie L de K , un point $x \in D_\phi(L)$, de poids $\kappa = \kappa(x) \in \mathcal{W}(L)$ la fibre \mathcal{S}_x s'identifie au sous-espace de $\varinjlim_{v,w} S_{v,w}^{\kappa}(\Gamma, L)$ constitué des formes de Siegel cuspidales surconvergentes de valeurs propres données par le système de valeurs propres de Hecke $\theta_x = x \circ \theta: \mathbf{T} \rightarrow L$. Si ce point est de poids classique et de pente petite au sens de 10.3.2, il définit une (ou plusieurs) forme(s) de Siegel classique de $S_k(\Gamma_B(p))$.

Notons $\mathcal{X}^{\mathrm{BMT}} = D_\phi$, munie de $\theta: \mathbf{T} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{X}^{\mathrm{BMT}}}$, $\kappa: \mathcal{X}^{\mathrm{BMT}} \rightarrow \mathcal{W}$ et $\mathcal{S}^{\mathrm{BMT}} = \mathcal{S}$, les données ainsi obtenues. La proposition 10.2.5 montre que le morphisme HTI^* induit un morphisme $\mathcal{X}^{\mathrm{BMT}} \rightarrow \mathcal{X}^{\mathrm{AIP}}$ qui fournit une identification canonique de quadruplets $(\mathcal{X}^{\mathrm{BMT}}, \theta, \kappa, \mathcal{S}^{\mathrm{BMT}}) = (\mathcal{X}^{\mathrm{AIP}}, \theta, \kappa, \mathcal{S}^{\mathrm{AIP}})$.

Annexe A. Le morphisme des périodes

Dans cet appendice on utilise les notations de 6.2 et de [BM10]. On fixe une W -algèbre admissible normale S et $(\mathcal{M}, \phi_{\mathcal{M}})$ un σ -module libre de rang r sur $\tilde{\mathbf{A}}_{\mathrm{cris}}^\nabla(S)$ (voir [BM10, Definition 4.21]).

A.1 Le morphisme des périodes en caractéristique p

Soit $(\overline{\mathcal{M}}, \phi_{\overline{\mathcal{M}}})$ la réduction de $(\mathcal{M}, \phi_{\mathcal{M}})$ modulo $(p, I^{\{p-1\}})$, qui fournit un module libre de rang r sur $\Lambda_0(S)/p\Lambda_0(S)$ avec un endomorphisme semi-linéaire. Rappelons que $\Lambda_0(S)/p\Lambda_0(S) \simeq \mathcal{R}_S/\tilde{p}^{p-1}\mathcal{R}_S$ et que

$$J^{[1]}(\Lambda_0(S)/p\Lambda_0(S)) = \xi(\Lambda_0(S)/p\Lambda_0(S)) = \tilde{p}(\Lambda_0(S)/p\Lambda_0(S))$$

de sorte que

$$J^{[1]}\overline{\mathcal{M}} := J^{[1]}(\Lambda_0(S)/p\Lambda_0(S)) \otimes_{\Lambda_0(S)/p\Lambda_0(S)} \overline{\mathcal{M}} \simeq \overline{\mathcal{M}}/\tilde{p}^{p-2}\overline{\mathcal{M}}$$

Par ailleurs, l'image u de $\sigma_1(\xi)$ dans $\Lambda_0(S)$ est inversible (cf [BM10, Lemme 5.10]), si bien que l'application $\phi_1 - \text{Id}_{\overline{\mathcal{M}}}: J^{[1]}\overline{\mathcal{M}} \rightarrow \overline{\mathcal{M}}$ s'identifie à l'application

$$\overline{\mathcal{M}}/\widetilde{p}^{p-2}\overline{\mathcal{M}} \xrightarrow{u\phi_{\overline{\mathcal{M}}} - \widetilde{p}\text{Id}_{\overline{\mathcal{M}}}} \overline{\mathcal{M}}$$

Supposons que $\widetilde{p}^{p\varepsilon} \in \det(1 \otimes \phi_{\overline{\mathcal{M}}})$ avec $\varepsilon \in \mathbf{Q} \cap [0, 1/p[$. On sait (cf [BM10, Proposition 5.25]) que :

- (i) $\widetilde{p}^{p\varepsilon}\overline{\mathcal{M}} \subset \text{Im}(\phi_{\overline{\mathcal{M}}}) = \text{Im}(\phi_1 - \text{Id}_{\overline{\mathcal{M}}})$;
- (ii) le \mathbf{F}_p -espace vectoriel $\mathbf{V}(\overline{\mathcal{M}}) := \mathbf{V}(\Lambda_0(S)/p\Lambda_0(S), (\overline{\mathcal{M}}, \phi_{\overline{\mathcal{M}}}))$ est de dimension r .

On dispose d'une application $\Lambda_0(S)/p\Lambda_0(S)$ -linéaire

$$\alpha_{\overline{\mathcal{M}}}: (\Lambda_0(S)/p\Lambda_0(S)) \otimes_{\mathbf{F}_p} \mathbf{V}(\overline{\mathcal{M}}) \rightarrow J^{[1]}\overline{\mathcal{M}}$$

déduite de l'inclusion $\mathbf{V}(\overline{\mathcal{M}}) \subset J^{[1]}\overline{\mathcal{M}}$.

LEMME A.1.1. On a $\widetilde{p}^{\frac{p}{p-1}} \text{Ker}(\alpha_{\overline{\mathcal{M}}}) = 0$.

Démonstration. Soit $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_r)$ une base de $\mathbf{V}(\overline{\mathcal{M}})$. On dispose de l'isomorphisme

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_S/\widetilde{p}^{p-1}\mathcal{R}_S &\rightarrow \overline{S}/p^{1-\frac{1}{p}}\overline{S} \\ (x_0, x_1, \dots) &\mapsto x_1 \end{aligned}$$

(qui envoie \widetilde{p} sur $p^{(1)} = p^{\frac{1}{p}}$). Le choix d'une base $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_r)$ de $\overline{\mathcal{M}}$ sur $\Lambda_0(S)/p\Lambda_0(S)$ fournit un isomorphisme $\overline{\mathcal{M}} \simeq (\overline{S}/p^{1-\frac{1}{p}}\overline{S})^r$ et identifie $u\phi_{\overline{\mathcal{M}}} - \widetilde{p}\text{Id}_{\overline{\mathcal{M}}}$ à une application

$$u\phi_{\overline{\mathcal{M}}} - p^{\frac{1}{p}}\text{Id}: (\overline{S}/p^{1-\frac{2}{p}}\overline{S})^r \rightarrow (\overline{S}/p^{1-\frac{1}{p}}\overline{S})^r$$

et $\mathbf{V}(\overline{\mathcal{M}})$ à un sous- \mathbf{F}_p -espace vectoriel de $(\overline{S}/p^{1-\frac{2}{p}}\overline{S})^r$.

La preuve de [BM10, Lemme 5.23] implique le résultat plus précis suivant : pour tout $\eta \in \mathbf{Q}_{>0}$, l'image de $\mathbf{V}(\overline{\mathcal{M}})$ dans $\widetilde{p}\overline{\mathcal{M}}/\widetilde{p}^{\frac{p}{p-1}+p\eta}\overline{\mathcal{M}} \simeq (\overline{S}/p^{\frac{1}{p(p-1)}+\eta}\overline{S})^r$ est un \mathbf{F}_p -espace vectoriel de dimension r . En effet, en reprenant les notations de *loc. cit.*, les p^r éléments de $\mathbf{V}(\overline{\mathcal{M}})$ se relèvent de façon unique en les solutions $Z \in \overline{S}^r$ de l'équation $\widehat{A}Z^{(p)} + p^{\frac{1}{p}}Z = 0$ (où $\widehat{A} = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq r} \in \mathbf{M}_r(\overline{S})$ est un relèvement de la matrice de $u\varphi$ dans la base \mathbf{e} , et $Z^{(p)}$ le vecteur dont les composantes sont celles de Z élevées à la puissance p). Pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$, on a $-p^{\frac{1}{p}}z_i = \sum_{j=1}^r a_{i,j}z_j^p$, de sorte que $\frac{1}{p} + v(z_i) \geq \inf(pv(z_j)) = pv(Z)$, et donc $\frac{1}{p} + v(Z) \geq pv(Z)$: si $Z \neq 0$, on a alors $v(Z) \leq \frac{1}{p(p-1)}$.

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \overline{S}$ tels que

$$\sum_{i=1}^r \lambda_i v_i = 0 \tag{*}$$

dans $(\overline{S}/p^{1-\frac{2}{p}}\overline{S})^r \simeq J^{[1]}\overline{\mathcal{M}}$: il s'agit de voir que $p^{\frac{1}{p-1}}\lambda_i \in p^{1-\frac{1}{p}}\overline{S}$ i.e. que $p^{\frac{1}{p(p-1)}}\lambda_i \in p^{1-\frac{2}{p}}\overline{S}$ pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$. Quitte à le remplacer par $S' \in \mathcal{I}_S$ assez grand, on peut supposer que S contient $p^{\frac{1}{p(p-1)}}$, les coordonnées des v_i dans la base \mathbf{e} et λ_i pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$, ainsi que les coefficients de la matrice de ϕ dans \mathbf{e} .

Cas où S est un anneau de valuation discrète. Soit v la valuation de S normalisée par $v(p) = 1$. Quitte à renuméroter les vecteurs de la base \mathbf{v} , on peut supposer que l'égalité (*) s'écrit $\sum_{i=1}^s \lambda_i v_i = 0$, que la suite $(v(\lambda_i))_{1 \leq i \leq s}$ est décroissante et que s est minimal. On a alors

$\sum_{i=1}^s \lambda_s^{-1} \lambda_i v_i = 0$ dans $(S/p^{1-\frac{2}{p}-v(\lambda_s)} S)^r$. Comme $u\phi_{\overline{\mathcal{M}}} \left(\sum_{i=1}^s \lambda_1^{-1} \lambda_i v_i \right) = \sum_{i=1}^s (\lambda_s^{-1} \lambda_i)^p p^{\frac{1}{p}} v_i$ dans $(\overline{S}/p^{1-\frac{1}{p}-v(\lambda_s)} \overline{S})^r$, on a $p^{v(\lambda_s)} \sum_{i=1}^s [(\lambda_s^{-1} \lambda_i)^p - \lambda_s^{-1} \lambda_i] v_i = 0$ dans $(S/p^{1-\frac{2}{p}} S)^r$. Par minimalité de s , on a $p^{v(\lambda_s)} [(\lambda_s^{-1} \lambda_i)^p - \lambda_s^{-1} \lambda_i] = 0$ dans $S/p^{1-\frac{2}{p}} S$, i.e. $(\lambda_s^{-1} \lambda_i)^p - \lambda_s^{-1} \lambda_i \in p^{1-\frac{2}{p}-v(\lambda_s)} S$ pour tout $i \in \{1, \dots, s\}$. Supposons $v(\lambda_s) < 1 - \frac{2}{p} - \frac{1}{p(p-1)}$: on a $v(\lambda_s) = 1 - \frac{2}{p} - \frac{1}{p(p-1)} - \eta$ avec $\eta \in \mathbf{Q}_{>0}$, donc $(\lambda_s^{-1} \lambda_i)^p - \lambda_s^{-1} \lambda_i \in p^{\frac{1}{p(p-1)}+\eta} S$ pour tout $i \in \{1, \dots, s\}$. Si $\tilde{\lambda}_i$ désigne l'image de $\lambda_s^{-1} \lambda_i$ dans $S/p^{\frac{1}{p(p-1)}+\eta} S$, on a donc $\tilde{\lambda}_i \in \mathbf{F}_p$ pour tout $i \in \{1, \dots, s\}$, et $\sum_{i=1}^s \tilde{\lambda}_i v_i = 0$ dans $\mathbf{V}(\overline{\mathcal{M}})$: comme $\tilde{\lambda}_s = 1$, cela contredit l'indépendance linéaire sur \mathbf{F}_p de la famille \mathbf{v} dans $(S/p^{\frac{1}{p(p-1)}+\eta} S)^r$. On a donc $v(\lambda_s) \geq 1 - \frac{2}{p} - \frac{1}{p(p-1)}$ a fortiori $p^{\frac{1}{p(p-1)}} \lambda_i \in p^{1-\frac{2}{p}} S$ pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$.

Cas général. Pour tout idéal premier minimal \mathfrak{p} de S/pS , notons $\widehat{S}_{\mathfrak{p}}$ le séparé complété, pour la topologie p -adique, du localisé $S_{\mathfrak{p}}$. C'est un anneau de valuation discrète : notons $v_{\mathfrak{p}}$ la valuation de $\widehat{S}_{\mathfrak{p}}$, normalisée par $v_{\mathfrak{p}}(p) = 1$. L'égalité (*) induit une égalité dans $(S_{\mathfrak{p}}/p^{1-\frac{2}{p}} S_{\mathfrak{p}})^r$. D'après le cas traité plus haut, on a $v_{\mathfrak{p}}(p^{\frac{1}{p(p-1)}} \lambda_i) \geq 1 - \frac{2}{p}$ pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$. Comme c'est vrai pour tout idéal premier de hauteur 1 contenant pS et comme S est normal, cela implique que $p^{\frac{1}{p(p-1)}} \lambda_i \in p^{1-\frac{2}{p}} S$ pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$, ce qu'on voulait. \square

PROPOSITION A.1.2. On a $\widehat{p^{\frac{1}{p-1}}} \text{Coker}(\alpha_{\overline{\mathcal{M}}}) = 0$.

Cela résulte des deux lemmes suivants.

LEMME A.1.3. Il existe $c \in \mathbf{Q} \cap [0, p-2]$ tel que $\widehat{p^c} \text{Coker}(\alpha_{\overline{\mathcal{M}}}) = 0$.

Démonstration. On conserve les notations de la preuve du lemme A.1.1. Soit $\widetilde{\mathcal{M}}$ un \mathcal{R}_S -module libre de rang r tel que $\widetilde{\mathcal{M}}/\widetilde{p}^{p-1} \widetilde{\mathcal{M}} \xrightarrow{\sim} \overline{\mathcal{M}}$. Soit $\tilde{\mathbf{e}} = (\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_r)$ une base de $\widetilde{\mathcal{M}}$ un \mathcal{R}_S qui relève \mathbf{e} . Fixons $\tilde{\phi} : \widetilde{\mathcal{M}} \rightarrow \widetilde{\mathcal{M}}$ semi-linéaire relevant $\phi_{\overline{\mathcal{M}}}$ (il suffit pour cela de choisir pour la matrice de $1 \otimes \tilde{\phi}$ dans la base $\tilde{\mathbf{e}}$ un relèvement dans $M_r(\mathcal{R}_S)$ de la matrice de $1 \otimes \phi$ dans la base \mathbf{e}). Par hypothèse, $\tilde{\mu} := \det(1 \otimes \tilde{\phi})$ divise \widetilde{p}^{p^e} (car c'est vrai modulo \widetilde{p}^{p-1}). Notons aussi $\tilde{u} \in \mathcal{R}_S^\times$ relevant l'image de u dans $\Lambda_0(S)/p\Lambda_0(S) \simeq \mathcal{R}_S/\widetilde{p}^{p-1} \mathcal{R}_S$.

Commençons par montrer que pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$, il existe $\tilde{v}_i \in \widetilde{\mathcal{M}}$ relevant $v_i \in J^{[1]} \overline{\mathcal{M}} \simeq \overline{\mathcal{M}}/\widetilde{p}^{p-2} \overline{\mathcal{M}}$ et tel que $\tilde{u} \tilde{\phi}(\tilde{v}_i) = \widetilde{p} \tilde{v}_i$. Choisissons $\tilde{x}_{i,0} \in \widetilde{\mathcal{M}}$ quelconque relevant v_i . Comme $u\phi_{\overline{\mathcal{M}}}(v_i) = \widetilde{p} v_i$, on a $\tilde{u} \tilde{\phi}(\tilde{x}_{i,0}) \equiv \widetilde{p} \tilde{x}_{i,0} \pmod{\widetilde{p}^{p-1} \widetilde{\mathcal{M}}}$. Pour $n \in \mathbf{N}$, posons $\delta_n = p^n(p-3) + \frac{p^{n+1}-2p^n+p}{p-1} \in \mathbf{N}_{>0}$. On a $\delta_0 = p-1$ et $\delta_{n+1} = p(\delta_n - 1)$. Supposons qu'il existe $x_{i,n} \in \widetilde{\mathcal{M}}$ qui relève v_i et tel que $\tilde{u} \tilde{\phi}(\tilde{x}_{i,n}) \equiv \widetilde{p} \tilde{x}_{i,n} \pmod{\widetilde{p}^{\delta_n} \widetilde{\mathcal{M}}}$: écrivons $\tilde{u} \tilde{\phi}(\tilde{x}_{i,n}) = \widetilde{p} \tilde{x}_{i,n} + \widetilde{p}^{\delta_n} y_{i,n}$. Posons alors $\tilde{x}_{i,n+1} = \tilde{x}_{i,n} + \widetilde{p}^{\delta_n-1} y_{i,n} \in \widetilde{\mathcal{M}}$. Comme $\delta_n \geq p-1$, l'élément $\tilde{x}_{i,n+1}$ relève lui aussi v_i . Par ailleurs, on a

$$\tilde{u} \tilde{\phi}(\tilde{x}_{i,n+1}) - \widetilde{p} \tilde{x}_{i,n+1} = \tilde{u} \tilde{\phi}(\widetilde{p}^{\delta_n-1} y_{i,n}) = \tilde{u} \widetilde{p}^{\delta_n+1} \tilde{\phi}(y_{i,n})$$

Comme $p > 2$, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = +\infty$: on construit ainsi une suite de Cauchy $(\tilde{x}_{i,n})_{n \in \mathbf{N}}$ pour la topologie \widetilde{p} -adique dans $\widetilde{\mathcal{M}}$. Comme $\widetilde{\mathcal{M}} \simeq \mathcal{R}_S^r$ et \mathcal{R}_S est séparé et complet pour la topologie \widetilde{p} -adique, la suite $(\tilde{x}_{i,n})_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers $\tilde{v}_i \in \widetilde{\mathcal{M}}$ relevant v_i et tel que $\tilde{u} \tilde{\phi}(\tilde{v}_i) = \widetilde{p} \tilde{v}_i$ (par continuité).

Notons alors $\mathbf{V}(\widetilde{\mathcal{M}})$ le sous- \mathbf{F}_p -espace vectoriel de $\widetilde{\mathcal{M}}$ engendré par $\widetilde{\mathbf{v}} = (\widetilde{v}_1, \dots, \widetilde{v}_r)$. La réduction modulo \widetilde{p}^{p-2} fournit un isomorphisme $\mathbf{V}(\widetilde{\mathcal{M}}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{V}(\overline{\mathcal{M}})$. Par ailleurs, on dispose du morphisme

$$\widetilde{\alpha}: \mathcal{R}_S \otimes_{\mathbf{F}_p} \mathbf{V}(\widetilde{\mathcal{M}}) \rightarrow \widetilde{\mathcal{M}}$$

déduit de l'inclusion $\mathbf{V}(\widetilde{\mathcal{M}}) \subset \widetilde{\mathcal{M}}$ par \mathcal{R}_S linéarité. On a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}_S \otimes_{\mathbf{F}_p} \mathbf{V}(\widetilde{\mathcal{M}}) & \xrightarrow{\widetilde{\alpha}} & \widetilde{\mathcal{M}} \xrightarrow{\simeq} \widetilde{p}\widetilde{\mathcal{M}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\mathcal{R}_S/\widetilde{p}^{p-1}\mathcal{R}_S) \otimes_{\mathbf{F}_p} \mathbf{V}(\overline{\mathcal{M}}) & \xrightarrow{\alpha_{\overline{\mathcal{M}}}} & J^{[1]}\overline{\mathcal{M}} = \widetilde{p}\overline{\mathcal{M}} \end{array}$$

Il s'agit donc de montrer qu'il existe $c \in \mathbf{Q} \cap [0, p-2[$ tel que $\widetilde{p}^c \text{Coker}(\widetilde{\alpha}) = 0$. La commutativité du diagramme et le lemme A.1.1 impliquent que si $x \in \mathcal{R}_S \otimes_{\mathbf{F}_p} \mathbf{V}(\widetilde{\mathcal{M}})$ est tel que $\widetilde{\alpha}(x) \in \widetilde{p}^{p-2}\widetilde{\mathcal{M}}$, alors $\widetilde{p}^{\frac{p}{p-1}}x \in \widetilde{p}^{p-1}\mathcal{R}_S \otimes_{\mathbf{F}_p} \mathbf{V}(\widetilde{\mathcal{M}})$, i.e. $x \in \widetilde{p}^{\frac{p^2-3p+1}{p-1}}\mathcal{R}_S \otimes_{\mathbf{F}_p} \mathbf{V}(\widetilde{\mathcal{M}})$. Comme \mathcal{R}_S est séparé et complet pour la topologie \widetilde{p} -adique et sans \widetilde{p} -torsion, cela implique qu'une part que $\widetilde{\alpha}$ est injectif. D'autre part, si $\text{Coker}(\widetilde{\alpha})$ est tué par \widetilde{p}^d avec $d \in \mathbf{Q}_{\geq p-2}$, il l'est aussi par $\widetilde{p}^{d-\frac{p^2-3p+1}{p-1}}$. Cela implique alors que $\text{Coker}(\widetilde{\alpha})$ est tué par \widetilde{p}^c avec $c \in \mathbf{Q}_{\geq 0}$ et $c < p-2$. Comme $\widetilde{\alpha}$ est une application linéaire entre deux \mathcal{R}_S -modules libres de même rang, il reste donc à montrer que $\det(\widetilde{\alpha})$ divise une puissance de \widetilde{p} .

On a $\det(\mathcal{R}_S \otimes_{\mathbf{F}_p} \mathbf{V}(\widetilde{\mathcal{M}})) = \mathcal{R}_S \widetilde{v}_1 \wedge \dots \wedge \widetilde{v}_r$ et $\det(\widetilde{\mathcal{M}}) = \mathcal{R}_S \widetilde{e}_1 \wedge \dots \wedge \widetilde{e}_r$: il existe $\widetilde{\lambda} \in \mathcal{R}_S$ tel que

$$\det(\widetilde{\alpha})(\widetilde{v}_1 \wedge \dots \wedge \widetilde{v}_r) = \widetilde{\lambda} \widetilde{e}_1 \wedge \dots \wedge \widetilde{e}_r$$

D'après ce qui précède, il s'agit de voir que $\widetilde{\lambda}$ divise une puissance de \widetilde{p} . Notons que l'injectivité de $\widetilde{\alpha}$ implique que $\widetilde{\lambda}$ n'est pas diviseur de zéro. On a

$$\begin{cases} \widetilde{\phi}(\widetilde{e}_1) \wedge \dots \wedge \widetilde{\phi}(\widetilde{e}_r) = \widetilde{\mu} \widetilde{e}_1 \wedge \dots \wedge \widetilde{e}_r \\ \widetilde{u} \widetilde{\phi}(\widetilde{v}_1) \wedge \dots \wedge \widetilde{u} \widetilde{\phi}(\widetilde{v}_r) = \widetilde{p}^r \widetilde{v}_1 \wedge \dots \wedge \widetilde{v}_r \end{cases}$$

Comme $\widetilde{\alpha}$ est déduit de l'inclusion $\mathbf{V}(\widetilde{\mathcal{M}}) \subset \widetilde{\mathcal{M}}$ par \mathcal{R}_S linéarité, il est compatible à $\widetilde{\phi}$, de sorte que $\widetilde{u}^r \widetilde{\mu} \widetilde{\lambda}^p = \widetilde{p}^r \widetilde{\lambda}$, d'où $\widetilde{u}^r \widetilde{\mu} \widetilde{\lambda}^{p-1} = \widetilde{p}^r$ (car $\widetilde{\lambda}$ n'est pas diviseur de zéro), et donc $\widetilde{\lambda} \mid \widetilde{p}^r$, ce qu'on voulait. \square

LEMME A.1.4. Si $\widetilde{p}^c \text{Coker}(\alpha_{\overline{\mathcal{M}}}) = 0$ avec $c \in \mathbf{Q} \cap [0, p-2[$, alors $\widetilde{p}^{\frac{1}{p-1}} \text{Coker}(\alpha_{\overline{\mathcal{M}}}) = 0$.

Démonstration. On peut supposer $c > \frac{1}{p-1}$. Soit $y \in J^{[1]}\overline{\mathcal{M}}$. Par hypothèse, il existe $z \in (\Lambda_0(S)/p\Lambda_0(S)) \otimes_{\mathbf{F}_p} \mathbf{V}(\overline{\mathcal{M}})$ tel que $\widetilde{p}^c y = \alpha_{\overline{\mathcal{M}}}(z)$. On a alors $\alpha_{\overline{\mathcal{M}}}(\widetilde{p}^{p-2-c}z) = 0$, de sorte que $\widetilde{p}^{p-2-c+\frac{p}{p-1}}z = \widetilde{p}^{p-1-c+\frac{1}{p-1}}z = 0$ d'après le lemme A.1.1. Par normalité, il existe donc $x_0 \in (\Lambda_0(S)/p\Lambda_0(S)) \otimes_{\mathbf{F}_p} \mathbf{V}(\overline{\mathcal{M}})$ tel que $z = \widetilde{p}^{c-\frac{1}{p-1}}x_0$. On a alors $\widetilde{p}^{c-\frac{1}{p-1}}(\widetilde{p}^{\frac{1}{p-1}}y - \alpha_{\overline{\mathcal{M}}}(x_0)) = 0$, si bien qu'il existe $y_1 \in J^{[1]}\overline{\mathcal{M}}$ tel que $\widetilde{p}^{\frac{1}{p-1}}y = \alpha_{\overline{\mathcal{M}}}(x_0) + \widetilde{p}^{p-2-c+\frac{1}{p-1}}y_1$. On peut ainsi construire des suites $(y_n)_{n \in \mathbf{N}} \in J^{[1]}\overline{\mathcal{M}}^{\mathbf{N}}$ et $(x_n)_{n \in \mathbf{N}} \in ((\Lambda_0(S)/p\Lambda_0(S)) \otimes_{\mathbf{F}_p} \mathbf{V}(\overline{\mathcal{M}}))^{\mathbf{N}}$ telles que $y_0 = y$ et $\widetilde{p}^{\frac{1}{p-1}}y_n = \alpha_{\overline{\mathcal{M}}}(x_n) + \widetilde{p}^{p-2-c+\frac{1}{p-1}}y_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. On a alors $\widetilde{p}^{\frac{1}{p-1}}y = \alpha_{\overline{\mathcal{M}}}(x)$ pour $x = \sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{p}^{n(p-2-c)}x_n \in (\Lambda_0(S)/p\Lambda_0(S)) \otimes_{\mathbf{F}_p} \mathbf{V}(\overline{\mathcal{M}})$ (la série n'a qu'un nombre fini de termes car $\widetilde{p}^{n(p-2-c)} = 0$ dans $\Lambda_0(S)/p\Lambda_0(S)$ si $n(p-2-c) \geq p-1$). \square

A.2 Le morphisme des périodes en caractéristique 0

Soit $(\mathcal{M}, \phi_{\mathcal{M}})$ un σ -module libre de rang r sur $\tilde{A}_{\text{cris}}^{\nabla}(S)$, tel que $\tilde{p}^{p\varepsilon} \in \det(1 \otimes \phi_{\mathcal{M}})$ avec $2\varepsilon \in [0, 1/p[$. D'après [BM10, Théorème 5.40], pour tout $\alpha \in \mathbf{Q} \cap]2\varepsilon, \frac{1}{p}[$, le \mathbf{Z}_p -module $\mathbf{V}(\Lambda_{\alpha}(S), \mathcal{M})$ est libre de rang r . Comme $\mathbf{V}(\Lambda_{\alpha}(S), \mathcal{M}) \subset J^{[1]}\Lambda_{\beta}(S) \otimes_{\tilde{A}_{\text{cris}}^{\nabla}(S)} \mathcal{M}$, pour tout $\beta \in \mathbf{Q} \cap [\alpha, 1[$, on dispose de l'application $\Lambda_{\beta}(S)$ -linéaire :

$$\alpha_{\mathcal{M}, \beta} : \Lambda_{\beta}(S) \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{V}(\Lambda_{\alpha}(S), \mathcal{M}) \rightarrow J^{[1]}\Lambda_{\beta}(S) \otimes_{\tilde{A}_{\text{cris}}^{\nabla}(S)} \mathcal{M}$$

Posons $\overline{\mathcal{M}} = (\Lambda_0(S)/p\Lambda_0(S)) \otimes_{\tilde{A}_{\text{cris}}^{\nabla}(S)} \mathcal{M}$ et $\phi_{\overline{\mathcal{M}}}$ l'opérateur de Frobenius induit. Comme on l'a vu dans le paragraphe A.1, on dispose de l'application $\alpha_{\overline{\mathcal{M}}} : (\Lambda_0(S)/p\Lambda_0(S)) \otimes_{\mathbf{F}_p} \mathbf{V}(\overline{\mathcal{M}}) \rightarrow J^{[1]}\overline{\mathcal{M}}$.

PROPOSITION A.2.1. *Coker $(\alpha_{\mathcal{M}, \beta})$ est tué par $[\tilde{p}]^{\frac{1}{p-1}}$ pour tout $\beta \in \mathbf{Q} \cap]\max(\alpha, \frac{1}{p-1}), 1[$.*

Démonstration. En tensorisant par $\Lambda_{\beta}(S)/p\Lambda_{\beta}(S)$, la proposition A.1.2 implique que le conoyau de l'application

$$(\Lambda_{\beta}(S)/p\Lambda_{\beta}(S)) \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{V}(\Lambda_{\alpha}(S), \mathcal{M}) \rightarrow J^{[1]}(\Lambda_{\beta}(S)/p\Lambda_{\beta}(S)) \otimes_{\tilde{A}_{\text{cris}}^{\nabla}(S)} \mathcal{M}$$

est tué par $\tilde{p}^{\frac{1}{p-1}}$. Soit alors $y \in J^{[1]}\Lambda_{\beta}(S) \otimes_{\tilde{A}_{\text{cris}}^{\nabla}(S)} \mathcal{M}$: il existe $y_1 \in J^{[1]}\Lambda_{\beta}(S) \otimes_{\tilde{A}_{\text{cris}}^{\nabla}(S)} \mathcal{M}$ et $(\lambda_{i,0})_{1 \leq i \leq r} \in \Lambda_{\beta}(S)^r$ tels que

$$[\tilde{p}]^{\frac{1}{p-1}} y = \sum_{i=1}^r \lambda_{i,0} v_i + p y_1 = \sum_{i=1}^r \lambda_{i,0} v_i + \frac{p}{[\tilde{p}]^{\frac{1}{p-1}}} [\tilde{p}]^{\frac{1}{p-1}} y_1$$

On construit ainsi par récurrence des suites $((\lambda_{i,n})_{1 \leq i \leq r})_{n \in \mathbf{N}} \in (\Lambda_{\beta}(S)^r)^{\mathbf{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbf{N}_{>0}} \in J^{[1]}\Lambda_{\beta}(S) \otimes_{\tilde{A}_{\text{cris}}^{\nabla}(S)} \mathcal{M}$ telles que pour tout $n \in \mathbf{N}_{>0}$, on ait

$$[\tilde{p}]^{\frac{1}{p-1}} y = \sum_{i=1}^r \sum_{j=0}^{n-1} \frac{p^j}{[\tilde{p}]^{\frac{j}{p-1}}} \lambda_{i,j} v_i + \frac{p^n}{[\tilde{p}]^{\frac{n}{p-1}}} [\tilde{p}]^{\frac{1}{p-1}} y_n$$

Comme $\frac{1}{p-1} < \beta$, la suite $\left(\frac{p^n}{[\tilde{p}]^{\frac{n}{p-1}}}\right)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers 0 pour la topologie p -adique dans $\Lambda_{\beta}(S)$.

Il en résulte que les séries $\lambda_i := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{p^j}{[\tilde{p}]^{\frac{j}{p-1}}} \lambda_{i,j}$ convergent dans $\Lambda_{\beta}(S)$, et qu'en passant à la

limite, on a $[\tilde{p}]^{\frac{1}{p-1}} y = \sum_{i=1}^r \lambda_i v_i$, i.e. $[\tilde{p}]^{\frac{1}{p-1}} y = \alpha_{\mathcal{M}, \beta} \left(\sum_{i=1}^r \lambda_i \otimes v_i \right)$. \square

COROLLAIRE A.2.2. *Pour tout $\beta \in \mathbf{Q} \cap]\max(\alpha, \frac{1}{p-1}), 1[$,*

$$\alpha_{\mathcal{M}, \beta} [p^{-1}] : \Lambda_{\beta}(S) [p^{-1}] \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{V}(\Lambda_{\alpha}(S), \mathcal{M}) \rightarrow J^{[1]}\Lambda_{\beta}(S) [p^{-1}] \otimes_{\tilde{A}_{\text{cris}}^{\nabla}(S)} \mathcal{M}$$

est un isomorphisme.

Démonstration. Les choix d'une base de $\mathbf{V}(\Lambda_{\alpha}(S), \mathcal{M})$ sur \mathbf{Z}_p et de \mathcal{M} sur $\tilde{A}_{\text{cris}}^{\nabla}(S)$ permettent de décrire $\alpha_{\mathcal{M}, \beta}$ par une matrice $A \in \mathbf{M}_r(\Lambda_{\beta}(S))$. D'après la proposition A.2.1, il existe $B \in \mathbf{M}_r(\Lambda_{\beta}(S))$ tel que $AB = [\tilde{p}]^{\frac{1}{p-1}} \text{I}_r$. Mais dans $\Lambda_{\beta}(S)$, on a $[\tilde{p}]^{\frac{1}{p-1}} \mid p$ vu que $p = \frac{p}{[\tilde{p}]^{\beta}} [\tilde{p}]^{\beta}$ et $\frac{1}{p-1} < \beta$, si bien que $[\tilde{p}]^{\frac{1}{p-1}} \in \Lambda_{\beta}(S) [p^{-1}]^{\times}$, et donc $A \in \mathbf{GL}_r(\Lambda_{\beta}(S) [p^{-1}])$. \square

A.3 Application aux F -cristaux surconvergents de Hodge

Considérons une immersion fermée dans un schéma formel affine lisse $\mathrm{Spf}(S) \hookrightarrow Z = \mathrm{Spf}(T)$, donnée par un morphisme de W -algèbres surjectif $u: T \rightarrow S$ où T est une W -algèbre formellement lisse ; notons $D(u)$ l'enveloppe à puissances divisées de T pour $\mathrm{Ker}(u)$.

On considère également $\theta_u = \mu \circ (\theta \otimes u): W(\mathcal{R}) \otimes_W T \rightarrow \widehat{S}$ où μ désigne la multiplication ; on forme $\widetilde{A}_{\mathrm{cris}}(u)$, complété p -adique de l'enveloppe à puissances divisées de $W(\mathcal{R}) \otimes_W T$ pour l'idéal $\theta_u^{-1}(p^{1-\frac{1}{p}}\widehat{S})$. On le munit d'une action de \mathcal{G}_S en faisant agir ce groupe trivialement sur le facteur T de $W(\mathcal{R}) \otimes_W T$. Cet anneau est une T -algèbre munie d'une connexion (voir [Bri08]) dont l'anneau des sections horizontales est $\widetilde{A}_{\mathrm{cris}}^\nabla(S)$ (qui est seulement une W -algèbre).

Soit S' une seconde W -algèbre admissible normale munie d'un morphisme de W -algèbres $\iota_S: S \rightarrow S'$ et d'un morphisme semilinéaire de W -algèbres $\varphi_S: S \rightarrow S'$, satisfaisant

$$\iota_S \circ \mathrm{Frob} \equiv \varphi_S \pmod{p^{1-\mu} S' [p^{1-\mu}]}$$

pour un certain $0 < \mu < 1$. On choisit alors (ι_T, ϕ_T) un *Frobenius de la présentation* $u: T \rightarrow S$, c'est-à-dire deux diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{\iota_T} & T' \\ u \downarrow & & \downarrow u' \\ S & \xrightarrow{\iota_S} & S' \end{array} \quad \begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{\varphi_T} & T' \\ u \downarrow & & \downarrow u' \\ S & \xrightarrow{\varphi_S} & S' \end{array}$$

tels que $\varphi_T \pmod{p^{1-w}}$ soit donné par $\iota_T \circ \mathrm{Frob}$ modulo $p^{1-\mu}$.

Le morphisme φ_T induit un morphisme $\mathcal{G}_{S'}$ -équivariant $\widetilde{A}_{\mathrm{cris}}(u) \rightarrow \widetilde{A}_{\mathrm{cris}}(u')$.

Soit $(\mathcal{M}, \Phi, \mathrm{Fil} \mathcal{M}_S)$ un F -cristal surconvergent de Hodge vérifiant les hypothèses de [BM10, Théorème 3.23] ; rappelons que $\mathrm{Fil} \mathcal{M}_S$ est un sous- S -module projectif de l'évaluation \mathcal{M}_S du cristal \mathcal{M} en l'épaississement trivial S . Notons $\mathcal{Z} = \mathrm{Spf}(D(u))$ le complété formel p -adique de l'enveloppe à puissances divisées de Z . On suppose qu'on dispose d'un sous-module $\mathrm{Fil} \mathcal{M}_{\mathcal{Z}} \subset \mathcal{M}_{\mathcal{Z}}$ relevant $\mathrm{Fil} \mathcal{M}_S$. Ces données sont décrites par celle d'un φ -module filtré $(M(u), \mathrm{Fil} M(u), \nabla, \Phi_{M(u)})$ sur $D(u)$ (voir [BM10, Définition 3.30]).

Par hypothèse, les modules $\mathrm{Fil} M(u)$ et $M(u)/\mathrm{Fil} M(u)$ sont localement libres de rang r sur $D(u)$. On pose $\mathcal{M}(u) = (\widetilde{A}_{\mathrm{cris}}(u) \otimes_{D(u)} M(u))^{\nabla=0}$.

Soit φ le Frobenius de $\widetilde{A}_{\mathrm{cris}}^\nabla(S')$. Le $\widetilde{A}_{\mathrm{cris}}^\nabla(S')$ -module $\mathcal{M}' = \mathcal{M}'(u) = \mathcal{M}(u) \otimes_{\widetilde{A}_{\mathrm{cris}}^\nabla(S)} \widetilde{A}_{\mathrm{cris}}^\nabla(S')$ est muni d'un endomorphisme φ -semilinéaire $\phi_{\mathcal{M}'}$. Soit $I \subset \widetilde{A}_{\mathrm{cris}}(u)$ le complété p -adique de l'idéal à puissances divisées engendré par les indéterminées de $\widetilde{A}_{\mathrm{cris}}(u)$ associées à $u: T \rightarrow S$ comme dans [BM10, Proposition 4.11]. On définit $\mathrm{Fil}_I \mathcal{M}' \subset \mathcal{M}'$ comme le sous- $\widetilde{A}_{\mathrm{cris}}^\nabla(S')$ -module engendré par l'image de $\widetilde{A}_{\mathrm{cris}}(u) \otimes_{D(u)} \mathrm{Fil} M(u)$ dans

$$\mathcal{M}' = \left[(\widetilde{A}_{\mathrm{cris}}(u) \otimes_{D(u)} M(u)) / I (\widetilde{A}_{\mathrm{cris}}(u) \otimes_{D(u)} M(u)) \right] \otimes_{\widetilde{A}_{\mathrm{cris}}^\nabla(S)} \widetilde{A}_{\mathrm{cris}}^\nabla(S').$$

Soit $w \in]0, 1 - \mu[$ la hauteur de Hodge de $\mathcal{M}_S / \mathrm{Fil} \mathcal{M}_S$; par le théorème de décomposition ([BM10, Proposition 4.27]), il existe un unique sous- σ -module $(\mathcal{U}', \phi_{\mathcal{U}'}) = (\mathcal{U}'(u), \phi_{\mathcal{U}'(u)})$ de $\mathcal{M}' = \mathcal{M}'(u)$ tel que

- (1) $[\widetilde{p}]^{((p-1)r+1)w} \in \det(\phi_{\mathcal{U}'}) \widetilde{A}_{\mathrm{cris}}^\nabla(S') ;$
- (2) $[\widetilde{p}]^w \mathcal{M}' + \mathrm{Fil}_I \mathcal{M}' = \mathcal{U}' \oplus \mathrm{Fil}_I \mathcal{M}'$

D'après la proposition A.2.1 appliquée à \mathcal{U}' , l'application

$$\alpha_{\mathcal{U}', \beta}: \Lambda_\beta(S') \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{V}(\Lambda_\alpha(S'), \mathcal{U}') \rightarrow J^{[1]} \Lambda_\beta(S') \otimes_{\widetilde{A}_{\mathrm{cris}}^\nabla(S)} \mathcal{U}'$$

est injective, de conoyau tué par $[\tilde{p}]^{\frac{1}{p-1}}$ pour tout $\alpha \in \mathbf{Q} \cap]\frac{2\varepsilon}{p}, \frac{1}{p}[$, en posant $\varepsilon = ((p-1)r+1)w$ et $\beta \in \mathbf{Q} \cap]\max(\alpha, \frac{1}{p-1}), 1[$.

Par ailleurs, on a un isomorphisme $\tau: \tilde{\mathbf{A}}_{\text{cris}}(u) \otimes_{\tilde{\mathbf{A}}_{\text{cris}}(S)} \mathcal{M}(u) \xrightarrow{\sim} \tilde{\mathbf{A}}_{\text{cris}}(u) \otimes_{\mathbf{D}(u)} M(u)$ (cf [BM10, Proposition 4.17]), et donc un isomorphisme

$$(\tilde{\mathbf{A}}_{\text{cris}}^{\nabla}(S') \otimes_{\tilde{\mathbf{A}}_{\text{cris}}(S)} \tilde{\mathbf{A}}_{\text{cris}}(u)) \otimes_{\tilde{\mathbf{A}}_{\text{cris}}(S')} \mathcal{M}'(u) \xrightarrow{\sim} (\tilde{\mathbf{A}}_{\text{cris}}^{\nabla}(S') \otimes_{\tilde{\mathbf{A}}_{\text{cris}}(S)} \tilde{\mathbf{A}}_{\text{cris}}(u)) \otimes_{\mathbf{D}(u)} M(u)$$

PROPOSITION A.3.1. *L'application $(1 \otimes \tau) \circ (1 \otimes \alpha_{\mathcal{U}', \beta})$ induit un morphisme $\mathcal{G}_{S'}$ -équivariant*

$$\widetilde{\text{HT}}: \widehat{\mathcal{S}}'(-1) \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{V}(\Lambda_{\alpha}(S'), \mathcal{U}'(u)) \rightarrow p^{w-\frac{1}{p-1}} \widehat{\mathcal{S}}' \otimes_{\mathbf{D}(u)} (M(u)/\text{Fil } M(u))$$

dont le conoyau est tué par $p^{\frac{1}{p-1}}$.

Démonstration. Pour alléger les notations, on écrit \mathcal{M}' , \mathcal{U}' et M au lieu de $\mathcal{M}'(u)$, $\mathcal{U}'(u)$ et $M(u)$. En tensorisant l'égalité $[\tilde{p}]^w \mathcal{M}' + \text{Fil}_I \mathcal{M}' = \mathcal{U}' \oplus \text{Fil}_I \mathcal{M}'$ par

$$\mathcal{A}_{\beta}(u, S') := \Lambda_{\beta}(S') \otimes_{\tilde{\mathbf{A}}_{\text{cris}}(S)} \tilde{\mathbf{A}}_{\text{cris}}(u)$$

au-dessus de $\tilde{\mathbf{A}}_{\text{cris}}^{\nabla}(S')$, on a

$$\begin{aligned} [\tilde{p}]^w \mathcal{A}_{\beta}(u, S') \otimes_{\tilde{\mathbf{A}}_{\text{cris}}(S')} \mathcal{M}' + \mathcal{A}_{\beta}(u, S') \otimes_{\tilde{\mathbf{A}}_{\text{cris}}(S')} \text{Fil}_I \mathcal{M}' = \\ \mathcal{A}_{\beta}(u, S') \otimes_{\tilde{\mathbf{A}}_{\text{cris}}(S')} \mathcal{U}' \oplus \mathcal{A}_{\beta}(u, S') \otimes_{\tilde{\mathbf{A}}_{\text{cris}}(S')} \text{Fil}_I \mathcal{M}' \quad (*) \end{aligned}$$

Par ailleurs, comme

$$\text{Fil}_I \mathcal{M}' = \tilde{\mathbf{A}}_{\text{cris}}^{\nabla}(S') \otimes (\tilde{\mathbf{A}}_{\text{cris}}(u) \otimes_{\mathbf{D}(u)} \text{Fil } M) / I(\tilde{\mathbf{A}}_{\text{cris}}(u) \otimes_{\mathbf{D}(u)} \text{Fil } M)$$

on a $(1 \otimes \tau)(\text{Fil}_I \mathcal{M}'(u)) \subset \mathcal{A}_{\beta}(u, S') \otimes_{\mathbf{D}(u)} \text{Fil } M(u)$, de sorte que

$$(1 \otimes \tau)(\mathcal{A}_{\beta}(u, S') \otimes_{\tilde{\mathbf{A}}_{\text{cris}}(S')} \text{Fil}_I \mathcal{M}') = \mathcal{A}_{\beta}(u, S') \otimes_{\mathbf{D}(u)} \text{Fil } M$$

La décomposition (*) fournit donc l'isomorphisme

$$\mathcal{A}_{\beta}(u, S') \otimes_{\tilde{\mathbf{A}}_{\text{cris}}(S')} \mathcal{U}' \xrightarrow{1 \otimes \tau} [\tilde{p}]^w \mathcal{A}_{\beta}(u, S') \otimes_{\mathbf{D}(u)} (M/\text{Fil } M)$$

qui, composé avec $1 \otimes \alpha_{\mathcal{U}', \beta}$, fournit un morphisme

$$\mathcal{A}_{\beta}(u, S') \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{V}(\Lambda_{\alpha}(S'), \mathcal{U}') \xrightarrow{(1 \otimes \tau) \circ (1 \otimes \alpha_{\mathcal{M}'(u), \alpha})} [\tilde{p}]^w \xi \mathcal{A}(u, S') \otimes_{\mathbf{D}(u)} (M/\text{Fil } M) \quad (**)$$

de conoyau tué par $[\tilde{p}]^{\frac{1}{p-1}}$. Le morphisme d'anneaux $\theta: \tilde{\mathbf{A}}_{\text{cris}}^{\nabla}(S') \rightarrow \widehat{\mathcal{S}}'$ induit un morphisme $\theta: \Lambda_0(S') \rightarrow \widehat{\mathcal{S}}'$. Si $\beta < 1$, il se prolonge en $\theta: \Lambda_{\beta}(S') \rightarrow \widehat{\mathcal{S}}'$ en posant $\theta\left(\frac{p}{[\tilde{p}]^{\beta}}\right) = p^{1-\beta}$. Ce dernier se prolonge à son tour en $\theta_u := \theta \otimes \theta_u: \mathcal{A}_{\beta}(u, S') \rightarrow \widehat{\mathcal{S}}'$. Modulo $\text{Ker}(\theta_u)$, l'homomorphisme (**) tordu par $\mathbf{Z}_p(-1)$ fournit donc un homomorphisme

$$\widetilde{\text{HT}}: \widehat{\mathcal{S}}'(-1) \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{V}(\Lambda_{\alpha}(S'), \mathcal{U}') \rightarrow p^{w-\frac{1}{p-1}} \widehat{\mathcal{S}}' \otimes_{\mathbf{D}(u)} (M/\text{Fil } M)$$

de conoyau tué par $\theta([\tilde{p}]^{\frac{1}{p-1}}) = p^{\frac{1}{p-1}}$ (le facteur $p^{-\frac{1}{p-1}}$ provient de l'égalité $\xi \widehat{\mathcal{S}}' = p^{\frac{1}{p-1}} t \widehat{\mathcal{S}}'$ dans $\text{gr}^1 \tilde{\mathbf{A}}_{\text{cris}}^{\nabla}(S')$). Comme les applications $\alpha_{\mathcal{U}', \alpha}$, τ et θ_u sont $\mathcal{G}_{S'}$ -équivariantes, il en est de même de $\widetilde{\text{HT}}$. \square

COROLLAIRE A.3.2. *L'application (entière)*

$$\widetilde{\text{HT}}: \mathbf{V}(\Lambda_{\alpha}(S'), \mathcal{U}'(u))(-1) \rightarrow p^{w-\frac{1}{p-1}} \widehat{\mathcal{S}}' \otimes_S (\mathcal{M}_S/\text{Fil } \mathcal{M}_S)$$

fournit en inversant p un isomorphisme $\mathcal{G}_{S'}$ -équivariant

$$\mathrm{HT} = (\widetilde{\mathrm{HT}}^\vee)^{-1} : \widehat{S}'[p^{-1}] \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{V}(\Lambda_\alpha(S'), \mathcal{U}'(u))^{\mathrm{D}} \xrightarrow{\sim} \widehat{S}'[p^{-1}](1) \otimes_S (\mathcal{M}_S / \mathrm{Fil} \mathcal{M}_S)^\vee$$

(où $\mathbf{V}^{\mathrm{D}} = \mathbf{V}^\vee(1)$ est le « dual de Cartier » de \mathbf{V}).

Annexe B. Sous-groupe canonique et application de Hodge-Tate

Dans cette section, nous allons démontrer le théorème 8.2.2. Commençons par démontrer que \mathbb{L}_1 est canoniquement isomorphe à H_1 sur $X^{\mathrm{rig}}(\frac{v_{\mathrm{BM}}}{p})$.

B.1 Comparaison au sous-groupe canonique

PROPOSITION B.1.1. *Si $v \leq \frac{v_{\mathrm{BM}}}{p}$, on a un isomorphisme $\mathbb{L}_1 \cong H_1$ de faisceaux finis étales sur $X^{\mathrm{rig}}(v)$, compatible aux correspondances de Hecke et s'insérant dans le diagramme commutatif suivant*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Isom}_{X^{\mathrm{rig}}(0)}(A[p]^\circ, \mu_p^g) = T_1 & \xrightarrow{\quad} & T_{1,v} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Isom}_{X^{\mathrm{rig}}(v)}(H_1, \mu_p^g) \\ \downarrow & & \downarrow \swarrow \\ X^{\mathrm{rig}}(0) & \xrightarrow{\quad} & X^{\mathrm{rig}}(v) \end{array}$$

Démonstration. L'isomorphisme étant canonique, il suffit de le construire localement. Soient $\mathrm{Spf}(S) \subseteq \mathcal{V}$ un ouvert affine, $u: T \rightarrow S$ une présentation, $(M, \mathrm{Fil} M, \nabla, \phi_M)$ le φ -cristal filtré sur u , évaluation du F -cristal surconvergent localement de Hodge $R^1 f_* A$. Le $D(u)$ -module $M / \mathrm{Fil} M$ est localement libre de rang g . Posons $M' = D(u') \otimes_{D(u)} M$ et $\mathrm{Fil} M' = D(u') \otimes_{D(u)} \mathrm{Fil} M$. Posons $\mathcal{M} = (\tilde{A}_{\mathrm{cris}}(u) \otimes_{D(u)} M)^{\nabla=0} \simeq (\tilde{A}_{\mathrm{cris}}(u) \otimes_{D(u)} M) / I(\tilde{A}_{\mathrm{cris}}(u) \otimes_{D(u)} M)$, $\mathcal{M}' = \tilde{A}_{\mathrm{cris}}^\nabla(S') \otimes_{\tilde{A}_{\mathrm{cris}}^\nabla(S)} \mathcal{M}$. D'après le théorème de décomposition ([BM10, Théorème 4.27]), il existe un unique sous- φ -module $(\mathcal{U}', \phi_{\mathcal{U}'})$ de \mathcal{M}' tel que

- (1) $H(\mathcal{U}') = ((p-1)g+1)w$;
- (2) $[\tilde{p}]^w \mathcal{M}' + \mathrm{Fil}_I \mathcal{M}' = \mathcal{U}' \oplus \mathrm{Fil}_I \mathcal{M}'$

où $w = H(M / \mathrm{Fil} M)$ et $\mathrm{Fil}_I \mathcal{M}'$ est l'image de $A_{\mathrm{cris}}(u) \otimes_{D(u)} \mathrm{Fil} M$ dans \mathcal{M}' .

En tensorisant la décomposition $[\tilde{p}]^w \mathcal{M}' + \mathrm{Fil}_I \mathcal{M}' = \mathcal{U}' \oplus \mathrm{Fil}_I \mathcal{M}'$ par $\Lambda_0(S')$ au-dessus de $\tilde{A}_{\mathrm{cris}}^\nabla(S')$ et en quotientant par $p\Lambda_0(S') \otimes_{\tilde{A}_{\mathrm{cris}}^\nabla(S')} \mathcal{M}'$, on a

$$\begin{aligned} & [\tilde{p}]^w (\Lambda_0(S') / p\Lambda_0(S')) \otimes_{\tilde{A}_{\mathrm{cris}}^\nabla(S')} \mathcal{M}' + (\Lambda_0(S') / p\Lambda_0(S')) \otimes_{\tilde{A}_{\mathrm{cris}}^\nabla(S')} \mathrm{Fil}_I \mathcal{M}' = \\ & (\Lambda_0(S') / (p, [\tilde{p}]^{p-1-w}) \Lambda_0(S')) \otimes_{\tilde{A}_{\mathrm{cris}}^\nabla(S')} \mathcal{U}' \oplus (\Lambda_0(S') / p\Lambda_0(S')) \otimes_{\tilde{A}_{\mathrm{cris}}^\nabla(S')} \mathrm{Fil}_I \mathcal{M}' \end{aligned} \quad (3)$$

dans $(\Lambda_0(S') / p\Lambda_0(S')) \otimes_{\tilde{A}_{\mathrm{cris}}^\nabla(S')} \mathcal{M}'$.

On dispose du composé

$$T \rightarrow \tilde{A}_{\mathrm{cris}}(u) \rightarrow \tilde{A}_{\mathrm{cris}}(u) / I = \tilde{A}_{\mathrm{cris}}^\nabla(S) \rightarrow \Lambda_0(S) \rightarrow \Lambda_0(S) / p\Lambda_0(S) \xrightarrow{\sim} \bar{S} / p^{1-\frac{1}{p}} \bar{S}$$

l'isomorphisme $\Lambda_0(S) / p\Lambda_0(S) \xrightarrow{\sim} \bar{S} / p^{1-\frac{1}{p}} \bar{S}$ étant donné par $\theta \circ \varphi^{-1}$. Il se factorise en un morphisme

$$\psi_S: D(u) \rightarrow \bar{S} / p^{1-\frac{1}{p}} \bar{S}$$

ce dernier est égal au composé

$$D(u) \rightarrow S \rightarrow \bar{S}/p^{p-1}\bar{S} \xrightarrow{\sim} \bar{S}/p^{1-\frac{1}{p}}\bar{S}$$

où le dernier morphisme est l'inverse du Frobenius. On a

$$\begin{aligned} (\Lambda_0(S')/p\Lambda_0(S')) \otimes_{\tilde{A}_{\text{cris}}^\nabla(S')} \mathcal{M}' &\xrightarrow{\sim} (\bar{S}'/p^{1-\frac{1}{p}}\bar{S}')_{\psi_{S'} \otimes_{D(u')}} M' \\ (\Lambda_0(S')/p\Lambda_0(S')) \otimes_{\tilde{A}_{\text{cris}}^\nabla(S')} \text{Fil}_I \mathcal{M}' &\xrightarrow{\sim} (\bar{S}'/p^{1-\frac{1}{p}}\bar{S}')_{\psi_{S'} \otimes_{D(u')}} \text{Fil } M' \end{aligned}$$

Par ailleurs, on a la suite exacte

$$0 \rightarrow \text{Fil } M' \rightarrow M' \rightarrow H^1(A \times_{\mathcal{X}} \text{Spf}(D(u')), \mathcal{O}_{A \times_{\mathcal{X}} \text{Spf}(D(u'))}) \rightarrow 0$$

après extension des scalaires à $\bar{S}'/p^{1-\frac{1}{p}}\bar{S}'$, elle fournit un morphisme surjectif $\mathcal{G}_{S'}$ -équivariant

$$(\bar{S}'/p^{1-\frac{1}{p}}\bar{S}')_{\psi_{S'} \otimes_{D(u')}} M' \rightarrow (\bar{S}'/p^{1-\frac{1}{p}}\bar{S}')_{\psi_{S'} \otimes_{D(u')}} H^1(A \times_{\mathcal{X}} \text{Spf}(D(u')), \mathcal{O}_{A \times_{\mathcal{X}} \text{Spf}(D(u'))})$$

Appliqué à l'égalité (3), il induit un isomorphisme $\mathcal{G}_{S'}$ -équivariant canonique

$$\begin{aligned} (\Lambda_0(S')/(p, [\tilde{p}]^{p-1-w})\Lambda_0(S')) \otimes_{\tilde{A}_{\text{cris}}^\nabla(S')} \mathcal{U}' \\ \xrightarrow{\sim} (p^{\frac{w}{p}}\bar{S}'/p^{1-\frac{1}{p}}\bar{S}')_{\psi_{S'} \otimes_{D(u')}} H^1(A \times_{\mathcal{X}} \text{Spf}(D(u')), \mathcal{O}_{A \times_{\mathcal{X}} \text{Spf}(D(u'))}) \end{aligned}$$

En outre, $(\Lambda_0(S')/p\Lambda_0(S')) \otimes_{\tilde{A}_{\text{cris}}^\nabla(S')} \mathcal{U}'$ est libre de rang g sur $\bar{S}'/p^{1-\frac{1}{p}}\bar{S}'$, et sa hauteur de Hodge vaut

$$\frac{1}{p}H(\mathcal{U}') = ((p-1)g+1)\frac{w}{p}$$

D'après [BM10, Proposition 5.25], comme $H(\mathcal{U}') < \frac{1}{p}$ le \mathbf{F}_p -espace vectoriel

$$V_{1,S'} := \mathbf{V}(\Lambda_0(S')/(p, [\tilde{p}]^{p-1-w})\Lambda_0(S'), \mathcal{U}')$$

est de dimension g . Soit u l'image de $\sigma_1(\xi) = \frac{p-[\tilde{p}]^p}{p}$, i.e. de $1 - \frac{[\tilde{p}]^p}{p}$ dans $\Lambda_0(S')/p\Lambda_0(S')$. C'est une unité. D'après ce qui précède et par le Lemme [BM10, 5.23], le \mathbf{F}_p -espace vectoriel $V_{1,S'}$ s'identifie au noyau de

$$(p^{\frac{w}{p}}\bar{S}'/p^{1-\frac{2}{p}}\bar{S}')_{\psi_{S'} \otimes_{D(u')}} H_{S'}^1 \xrightarrow{u\phi - p^{\frac{1}{p}}} (p^{\frac{w}{p}}\bar{S}'/p^{1-\frac{1}{p}}\bar{S}')_{\psi_{S'} \otimes_{D(u')}} H_{S'}^1.$$

où $H_{S'}^1 := H^1(A \times_{\mathcal{X}} \text{Spf}(D(u')), \mathcal{O}_{A \times_{\mathcal{X}} \text{Spf}(D(u'))})$.

Notons u_0 l'image de

$$\sum_{m=0}^{\infty} m! \binom{\frac{1}{p-1}}{m} \left(\frac{-[\tilde{p}]^p}{p} \right)^{[m]}$$

dans $\Lambda_0(S')/p\Lambda_0(S')$ (comme l'idéal $p\tilde{A}_{\text{cris}}^\nabla(S') + \text{Ker}(\theta)$ est à puissances divisées dans $\tilde{A}_{\text{cris}}^\nabla(S')$, on a $\left(\frac{-[\tilde{p}]^p}{p} \right)^{[m]} \in \tilde{A}_{\text{cris}}^\nabla(S')$). Comme $m! \binom{\frac{1}{p-1}}{m} = \prod_{i=0}^{m-1} \frac{1-i(p-1)}{p-1}$, on a $v_p \left(m! \binom{\frac{1}{p-1}}{m} \right) \geq \lfloor \frac{m}{p} \rfloor$, ce qui implique que la série qui précède converge dans $\tilde{A}_{\text{cris}}^\nabla(S')$ (pour la topologie p -adique). On a bien sûr $u = u_0^{p-1}$. Par ailleurs, pour $g \in \mathcal{G}_{S'}$, on a $g([\tilde{p}]) = [\zeta]^{c(g)}[\tilde{p}]$ (où $c: \mathcal{G}_{S'} \rightarrow \mathbf{Z}_p(1)$ est un cocycle), de sorte que $g\left(\frac{[\tilde{p}]^p}{p}\right) = [\zeta]^{pc(g)}\frac{[\tilde{p}]^p}{p}$. Comme l'image de $[\zeta]^p$ dans $\Lambda_0(S')/p\Lambda_0(S')$

vaut 1, l'élément u_0 est invariant sous l'action de $\mathcal{G}_{S'}$. On a donc un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & V_{1,S'} & \longrightarrow & (p^{\frac{w}{p}} \bar{S}' / p^{1-\frac{2}{p}} \bar{S}')_{\psi_{S'} \otimes_{D(u')} H_{S'}^1} & \xrightarrow{u\phi - p^{\frac{1}{p}}} & (p^{\frac{w}{p}} \bar{S}' / p^{1-\frac{1}{p}} \bar{S}')_{\psi_{S'} \otimes_{D(u')} H_{S'}^1} \\ & & \downarrow & & \downarrow u_0 & & \downarrow u_0 \\ 0 & \longrightarrow & \tilde{V}_{1,S'} & \longrightarrow & (\bar{S}' / p^{1-\frac{2}{p}} \bar{S}')_{\psi_{S'} \otimes_{D(u')} H_{S'}^1} & \xrightarrow{\phi - p^{\frac{1}{p}}} & (\bar{S}' / p^{1-\frac{1}{p}} \bar{S}')_{\psi_{S'} \otimes_{D(u')} H_{S'}^1} \end{array}$$

Comme u_0 est inversible, les applications verticales sont injectives, comme il est invariant sous l'action de $\mathcal{G}_{S'}$, elles sont $\mathcal{G}_{S'}$ -équivariantes. Par ailleurs, le \mathbf{F}_p -espace vectoriel $\tilde{V}_{1,S'}$ est de dimension g en vertu de [BM10, Proposition 5.25]. Il en résulte qu'on dispose d'un isomorphisme \mathbf{F}_p -linéaire $\mathcal{G}_{S'}$ -équivant canonique $V_{1,S'} \xrightarrow{\sim} \tilde{V}_{1,S'}$. En tordant à la Tate, on en déduit, comme dans la Proposition A.3.1, la suite exacte

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow V_{1,S'}(-1) & \xrightarrow{\widehat{\text{HT}}_{1-\frac{2}{p}}} \left(p^{-\frac{1}{p-1}} \widehat{S}' \otimes_{D(u')} H_{S'}^1 \right) \otimes (\bar{S}' / p^{1-\frac{2}{p}} \bar{S}') \\ & \xrightarrow{\phi - p^{\frac{1}{p}}} \left(p^{-\frac{1}{p-1}} \widehat{S}' \otimes_{D(u')} H_{S'}^1 \right) \otimes (\bar{S}' / p^{1-\frac{1}{p}} \bar{S}') \end{aligned} \quad (4)$$

(en notant que $t\widehat{S}' = p^{\frac{1}{p-1}} \xi \widehat{S}'$).

Par ailleurs, avec les notations de [AG07], si $v(\lambda) \in]\frac{p}{(p-1)(2p-1)}, \frac{1}{p-1}]$, et $r = (p-1)v(\lambda)$, on a

$$0 \rightarrow H_{\text{fppf}}^1(A \otimes_S \bar{S}', G_\lambda)(-1) \xrightarrow{H^1(\rho_r^\lambda)} (\bar{S}' / p^r \bar{S}')_{\psi_{S'} \otimes_{D(u')} H_{S'}^1} \xrightarrow{\phi - a(\lambda)} (\bar{S}' / p \bar{S}')_{\psi_{S'} \otimes_{D(u')} H_{S'}^1}$$

(voir [AG07, Theorem 8.1 & Proposition 12.1]).

Prenons $\lambda = -p^{\frac{1}{p}}$ et $r = 1 - \frac{1}{p}$; on a $\frac{p}{(p-1)(2p-1)} < v_p(\lambda) = \frac{1}{p} \leq \frac{1}{p-1}$ vu que $p \geq 3$ et $a(\lambda) \equiv p^{\frac{1}{p}} \pmod{p\overline{\mathbf{Z}}_p}$ (car $w_{p-1} \equiv (p-1)! \pmod{p}$, cf [OT70, Proposition p.9]), de sorte que l'isomorphisme $H^1(\rho_r^\lambda)$ induit l'identification

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H_{\text{fppf}}^1(A \otimes_S \bar{S}', G_\lambda)(-1) & \xrightarrow{H^1(\rho_r^\lambda)} (\bar{S}' / p^{1-\frac{1}{p}} \bar{S}')_{\psi_{S'} \otimes_{D(u')} H_{S'}^1} \\ & \xrightarrow{\phi - p^{\frac{1}{p}}} (\bar{S}' / p \bar{S}')_{\psi_{S'} \otimes_{D(u')} H_{S'}^1} \end{aligned} \quad (5)$$

Les applications de passage au quotient $\bar{S}' / p \bar{S}' \rightarrow \bar{S}' / p^{1-\frac{1}{p}} \bar{S}'$ et $\bar{S}' / p^{1-\frac{1}{p}} \bar{S}' \rightarrow \bar{S}' / p^{1-\frac{2}{p}} \bar{S}'$ induisent un morphisme entre les suites exactes (5) et (4).

On a donc une application naturelle entre les noyaux

$$\pi_1 : H_{\text{fppf}}^1(A \otimes_S \bar{S}', G_\lambda)(-1) \rightarrow V_{1,S'}(-1)$$

D'après [BM10, Lemme 5.23], c'est un isomorphisme.

Avec les notations de [AG07, Definition 6.5], on a

$$H_{\text{fppf}}^1(A \otimes \bar{S}', \mu_p)^{[\lambda]} := H_{\text{fppf}}^1(A \otimes_S \bar{S}', G_\lambda) \hookrightarrow H_{\text{fppf}}^1(A \otimes_S \bar{S}', \mu_p)$$

Mais comme $v_p(\lambda) = \frac{1}{p}$, le sous-groupe canonique $H_1 \otimes \bar{S}'$ coïncide avec l'orthogonal de $H_{\text{fppf}}^1(A \otimes_S \bar{S}', \mu_p)^{[\lambda]}$ pour l'accouplement de Weil

$$(A \otimes_S \bar{S}') [p] \times H_{\text{fppf}}^1(A \otimes_S \bar{S}', \mu_p) \rightarrow \mu_p$$

(cf [AG07, §13.1]). Rappelons que $H_{\text{fppf}}^1(A \otimes_S \bar{S}', \mu_p) = A^t[p](\bar{S}')$. Il en résulte donc que

$$V_{1,S'}^\vee(1) \xrightarrow{\sim} H_{\text{fppf}}^1(A \otimes_S \bar{S}', \mu_p)/V_{1,S'} \xrightarrow{\sim} H_1^p \otimes_S \bar{S}'$$

(le premier isomorphisme étant déduit de la polarisation principale), de sorte que $V_{1,S'} \simeq H_1 \otimes_S \bar{S}'$, ce qu'on voulait. \square

B.2 Comparaison des applications de Hodge-Tate d'échelon 1

Soit $v < \frac{1}{2}$ et $r = 1 - v$. Le schéma abélien A sur $X^f(v)$ est principalement polarisé, mais afin de mettre en évidence la fonctorialité utilisée, on distinguera dans cette section la variété abélienne de sa duale A^t .

Posons $\lambda_0 = -p^{\frac{1}{p}}$, $\lambda_1 = (-p)^{\frac{1}{p-1}}$ et soit λ de valuation $\frac{1}{p} < v(\lambda) < \frac{1}{p-1}$ telle que $(p-1) \cdot v(\lambda) = 1 - v = r$. Si $v(\alpha) \leq v(\beta)$, on note comme dans [AG07, Sect.5.3] $\eta_{\beta,\alpha}: G_\beta \rightarrow G_\alpha$ le morphisme de schémas en groupes donné par $(1 + \beta u) \mapsto 1 + \alpha \cdot (\beta/\alpha)u$. Pour tout $t \in [1 - \frac{1}{p}, 1]$, soit $\bar{S}'_t = \bar{S}'/p^t \bar{S}'$.

LEMME B.2.1. *Les applications de réduction $\bar{S}'_1 \rightarrow \bar{S}'_r \rightarrow \bar{S}'_{1-\frac{1}{p}} \rightarrow \bar{S}'_{1-\frac{2}{p}}$ induisent un diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccc} H^1(A^t \times \bar{S}', G_{\lambda_1})(-1) & \xrightarrow{H^1(\rho_1^{\lambda_1})} & H^1(A^t \times \bar{S}'_1, \mathcal{O}_{A^t}) \\ \eta_{\lambda_1, \lambda} \downarrow & & \downarrow \\ H^1(A^t \times \bar{S}', G_\lambda)(-1) & \xrightarrow{H^1(\rho_r^\lambda)} & H^1(A^t \times \bar{S}'_r, \mathcal{O}_{A^t}) \\ \eta_{\lambda, \lambda_0} \downarrow & & \downarrow \\ H^1(A^t \times \bar{S}', G_{\lambda_0})(-1) & \xrightarrow{H^1(\rho_{1-\frac{1}{p}}^{\lambda_0})} & H^1(A^t \times \bar{S}'_{1-\frac{1}{p}}, \mathcal{O}_{A^t}) \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \\ V_{1,S'}(-1) & \xrightarrow{\widetilde{\text{HT}}_{1-\frac{2}{p}}} & \left(p^{-\frac{1}{p-1}} \cdot H^1(A^t \times \bar{S}', \mathcal{O}_{A^t}) \right)_{1-\frac{2}{p}} \end{array}$$

où π_1 est le morphisme entre les noyaux des suites exactes courtes (5) et (4) définies ci-dessus et $\widetilde{\text{HT}}_{1-\frac{2}{p}}$ désigne la réduction modulo $p^{1-\frac{2}{p}}$ de l'application $\widetilde{\text{HT}}$ définie dans A.3.2.

Démonstration. La commutation des deux premiers carrés est évidente, et la proposition [AG07, Prop.12.1] montre que les flèches verticales $\eta_{\lambda_1, \lambda}$ et $\eta_{\lambda, \lambda_0}$ sont des isomorphismes. Le dernier carré commutatif est donné par le morphisme de suites exactes de (5) vers (4) ; on a vu que le morphisme π_1 est un isomorphisme. \square

L'inclusion $H^1(A^t \times \bar{S}', G_\lambda) \subset H^1(A^t \times \bar{S}', \mu_p)$ donnée par le morphisme de faisceaux fppf $G_\lambda \rightarrow \mu_p$, $u \mapsto 1 + \lambda u$ s'identifie à l'inclusion du sous-groupe canonique $A[p]^\lambda$ dans $A[p]$ (voir Lemme 12.3 de [AG07]).

D'autre part, avec les notations de [AIP, Prop.3.2.2 et Section 4], les applications de restriction induisent les isomorphismes de faisceaux fppf : $\omega_{A/X^f(v), r} \cong \omega_{A[p]/X^f(v), r}$ (voir [AIP, 4.2.1]), et $\omega_{A[p]/X^f(v), r} \cong \omega_{H_1/X^f(v), r} = \omega_{H_1/X^f(v)}$. De plus, H_1^\perp s'identifie au noyau de l'application de Hodge-Tate classique $\text{HT}_{A[p]}: A^t[p] \rightarrow \omega_{A[p]/X^f(v)}$.

Pour $\text{Spf } S' \subset X^f(v)$, considérons le morphisme de Hodge-Tate classique $\text{HT}_1(\bar{S}') = \alpha_{H_1}$ associé à H_1 (cf [FT10]), donné par $H_1^p(\bar{S}') \ni x \mapsto x^*\left(\frac{dT}{T}\right) \in \omega_{H_1/S'} \otimes \bar{S}'/p\bar{S}'$. Rappelons

qu'on a posé $r = 1 - v$. Pour tout \bar{S}'_r -module fini M , on note $M^\vee = \text{Hom}_{\bar{S}'_r}(M, \bar{S}'_r)$.

PROPOSITION B.2.2. *Supposons qu'on ait $v < \frac{v_{\text{BM}}}{p}$ (donc $v < \frac{1}{p}$). Le diagramme suivant est commutatif*

$$\begin{array}{ccc} A[p]^\text{D}(\bar{S}') & \xrightarrow{\text{HT}_{A[p]}} & \omega_{A/\bar{S}'_r} \\ \downarrow & & \parallel \\ A[p]^{\lambda, \text{D}}(\bar{S}')_r & \xleftarrow{H^1(\rho_r^\lambda)^\vee} & H^1(A^t \times \bar{S}'_r, \mathcal{O}_{A^t})^\vee \end{array}$$

REMARQUE B.2.3. La donnée de λ_1 fournit une racine primitive p -ième de l'unité canonique ζ dans $\bar{\mathbf{Z}}_p/\lambda_1^p \bar{\mathbf{Z}}_p$. En effet, par [BS66, Chap.5 Sect.6.2], l'exponentielle tronquée en degré $< p$, notée E , permet de définir la racine primitive p ième de l'unité $\zeta = E(\lambda_1)$ dans $\bar{\mathbf{Z}}_p/\lambda_1^p \bar{\mathbf{Z}}_p$. Par conséquent, l'accouplement de Weil de $x \in A[p]^\text{D}(\bar{S}')$ et de $y \in A[p]^\lambda(\bar{S}')$ définit un élément $a \in \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ tel que $\langle x, y \rangle = \zeta^a$. La proposition revient à montrer que si $\langle x, y \rangle = \zeta^a$, alors pour la dualité entre $\text{Lie}(A)$ et ω_A , on a $\langle \text{HT}_{A[p]}(x), H^1(\rho_r^\lambda)(y) \rangle_r = a$.

Démonstration. Il suffit de montrer l'énoncé pour $(\lambda_1, 1)$ à la place de (λ, r) . En effet par la commutation du premier carré de B.2.1, si $x \in A[p]^\text{D}$ et $y \in A[p]^{\lambda_1}$, la relation $\langle x, y \rangle = \zeta^a$ et $a = \langle \text{HT}_{A[p]}(x), H^1(\rho_1^{\lambda_1})(y) \rangle_1$ entraîne la relation $\langle x, \eta_{\lambda_1, \lambda}(y) \rangle = \zeta^a$ et $a = \langle \text{HT}_{A[p]}(x), H^1(\rho_r^\lambda)(y) \rangle_r$; comme $\eta_{\lambda_1, \lambda}$ est un isomorphisme de $A[p]^{\lambda_1}$ vers $A[p]^\lambda$, la proposition en résulte.

On fixe donc $\lambda_1 = (-p)^{\frac{1}{p-1}}$ et $r = 1$ dans ce qui suit. Soit \mathfrak{m} l'idéal maximal de $\bar{\mathbf{Z}}_p$; on pose

$$A(\mathfrak{m}) = \text{Ker}(A(\bar{S}') \rightarrow A(\bar{S}'/\mathfrak{m}\bar{S}')).$$

Rappelons qu'il y a un unique homomorphisme de groupes formels

$$\ell_A: A(\mathfrak{m}) \rightarrow \text{Lie}(A) \otimes_{S'} \bar{S}'[p^{-1}]$$

dont la dérivée en 0 est Id ; c'est le logarithme de A (voir [Haz78, Prop.11.1.6]). Considérons le sous-faisceau $\hat{\mathcal{O}}_{A^t}(\mathfrak{m})^\times$ de $\hat{\mathcal{O}}_{A^t}^\times$ des fonctions formelles sur $A^t \times \bar{S}'$ à valeurs congrues à 1 mod. \mathfrak{m} . La série logarithme usuelle définit un morphisme de faisceaux

$$\log: \hat{\mathcal{O}}_{A^t}(\mathfrak{m})^\times \rightarrow \hat{\mathcal{O}}_{A^t}[p^{-1}]$$

d'où en passant à la cohomologie un morphisme de groupes :

$$H^1(\log): H^1(A^t \times \bar{S}', \hat{\mathcal{O}}_{A^t}(\mathfrak{m})^\times) \rightarrow H^1(A^t \times \bar{S}'[p^{-1}], \mathcal{O}_{A^t})$$

On a $H^1(A^t \times \bar{S}', \hat{\mathcal{O}}_{A^t}(\mathfrak{m})^\times) = A(\mathfrak{m})$ et $H^1(A^t \times \bar{S}'[p^{-1}], \mathcal{O}_{A^t}) = \text{Lie}(A) \otimes_{S'} \bar{S}'[p^{-1}]$. Avec ces identifications, la dérivée de l'homomorphisme $H^1(\log)$ en 0 est l'identité. On trouve donc $H^1(\log) = \ell_A$. Soit $x \in \text{Hom}(\hat{A}, \hat{\mathbf{G}}_m)$, et $x_* \in \text{Hom}(\text{Lie}(\hat{A}), \text{Lie}(\hat{\mathbf{G}}_m))$ sa dérivée; en caractéristique zéro, il est facile de vérifier que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A(\mathfrak{m}) & \xrightarrow{\ell_A} & \text{Lie}(A) \otimes_{S'} \bar{S}'[p^{-1}] \\ x \downarrow & & \downarrow x_* \\ \hat{\mathbf{G}}_m(\mathfrak{m}) & \xrightarrow{\log} & \text{Lie}(\hat{\mathbf{G}}_m) \otimes_{S'} \bar{S}'[p^{-1}] \end{array}$$

est commutatif. En effet, si $y \in A(\mathfrak{m})$ et $f: A(\mathfrak{m}) \rightarrow \bar{S}'[p^{-1}]$, on a $\ell_A(y)f = \lim_{n \rightarrow \infty} p^{-n}[f(p^n y) - f(0)]$, et de même, pour $z \in \hat{\mathbf{G}}_m(\mathfrak{m})$ et $g: \hat{\mathbf{G}}_m(\mathfrak{m}) \rightarrow \bar{S}'[p^{-1}]$, on a $\log(z)g = \lim_{n \rightarrow \infty} p^{-n}[g(p^n z) -$

$g(1)]$. Il suffit alors de remarquer que pour $f = g \circ x$, on a

$$x_*(\ell_A(y))g = \ell_A(y)f = \lim_{n \rightarrow \infty} p^{-n}[g(x(p^n y)) - g(1)] = \lim_{n \rightarrow \infty} p^{-n}[g(x(y)^{p^n}) - g(1)]$$

on trouve donc $x_*(\ell_A(y))g = \log(x(y))g$.

On restreint ce diagramme à $A[p]^{\lambda_1}(\bar{S}')$. On note $L(1 + \lambda_1 u)$ le tronqué à l'ordre $< p$ du logarithme \log sur $\hat{\mathcal{O}}_{A^t}(\lambda_1)^\times$. On voit donc que $\rho_1^{\lambda_1}(u)$ est la réduction de $\lambda_1^{-1}L(1 + \lambda_1 u)$ modulo p . C'est un morphisme de faisceaux en groupes fppf, soit par [AG07], soit par [BS66, Chap.5 Sect.6.2]. En réduisant modulo p , on déduit de la commutation du diagramme ci-dessus que pour tout $x \in \text{Hom}(A[p]^{\lambda_1}, \mathbf{G}_m)$, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A[p]^{\lambda_1}(\bar{S}') & \xrightarrow{H^1(\rho_1^{\lambda_1})} & \text{Lie}(A) \otimes_{S'} \bar{S}'_1 \\ x \downarrow & & \downarrow x_* \\ (1 + \lambda_1 \bar{S}')^\times & \xrightarrow{\lambda_1^{-1}L} & \bar{S}'_1 \end{array}$$

est commutatif.

Montrons alors la proposition B.2.2. Si $x \in A[p]^\text{D}$ on a $\text{HT}_1(x) = x^*(\frac{dT}{T}) \in \omega_{A,1}$ et pour tout $y \in A[p]^{\lambda_1}(\bar{S}')$, on a $H^1(\rho_1^{\lambda_1})(y) \in \text{Lie}(A)_1$; on peut donc considérer $\langle x^*(\frac{dT}{T}), H^1(\rho_1^{\lambda_1})(y) \rangle \in \bar{S}'_1$. La commutation du diagramme ci-dessus montre qu'il s'écrit aussi $\lambda_1^{-1}L(x(y))$. Mais, par [BS66, Chap.5 Sect.6.2], l'exponentielle tronquée en degré $< p$ fournit une racine primitive p -ième de l'unité $E(\lambda_1)$ dans $\bar{\mathbf{Z}}_p/\lambda_1^p \bar{\mathbf{Z}}_p$, et si $x(y) \equiv E(\lambda_1)^a \pmod{\lambda_1^p}$, on a $a = \lambda_1^{-1}L(x(y))$ dans $\bar{\mathbf{Z}}_p/p\bar{\mathbf{Z}}_p$. Ceci conclut la démonstration. \square

Annexe C. Module de Dieudonné d'une variété semiabélienne

C.1 Log-cristal de la variété de Kuga-Sato

Par [FC90, Chap.VI, Th.1.1], il existe un W -morphisme propre et log-lisse $\bar{f}: \bar{A} \rightarrow \bar{X}$ prolongeant le schéma abélien universel $f: A \rightarrow X$; il est associé à une décomposition en cônes polyédraux rationnels $\tilde{\Sigma}$ compatible à la décomposition Σ préalablement fixée pour définir \bar{X} . On suppose que $\tilde{\Sigma}$ est assez fine pour que le schéma semi-abélien $\mathcal{G} \rightarrow \bar{X}$ soit muni d'une immersion ouverte dans \bar{A} au-dessus de \bar{X} . On a la suite exacte de Hodge

$$0 \rightarrow \omega_{\mathcal{G}/\bar{X}} \rightarrow \mathcal{H}_{\log \text{dR}}^1(\bar{A}/\bar{X}) \rightarrow \omega_{\mathcal{G}/\bar{X}}^\vee \rightarrow 0$$

On a également une connexion à pôles logarithmiques

$$\nabla: \mathcal{H}_{\log \text{dR}}^1(\bar{A}/\bar{X}) \rightarrow \mathcal{H}_{\log \text{dR}}^1(\bar{A}/\bar{X}) \otimes \Omega_{\bar{X}}(\text{dlog } D)$$

où D désigne le diviseur à l'infini de \bar{X} sur W . En outre, on peut définir un endomorphisme de Frobenius de la manière suivante. Par log-lissité, $\mathcal{H}_{\log \text{dR}}^1(\bar{A}/\bar{X}) = \mathcal{H}_{\log \text{cris}}^1(\bar{A}_s/\bar{X})$ où s est le point fermé de W . Le Frobenius absolu de \bar{A}_s induit par fonctorialité un endomorphisme W -semilinéaire sur le cristal $\mathcal{H}_{\log \text{cris}}^1(\bar{A}_s/\bar{X})$ sur \bar{X}/W . Sur $\bar{X}^f(v)$, on dispose du relèvement excellent de Frobenius $\varphi: \bar{X}^f(\frac{v}{p}) \rightarrow \bar{X}^f(v)$ défini par la "propriété universelle" de la compactification toroïdale [FC90, Th.IV.5.7 (5)] : $\mathcal{G}_{\varphi(x)} = \mathcal{G}_x/H_{1,x}$, où $H_1 \rightarrow \bar{X}^f(v)$ désigne le schéma en groupes canonique fini et plat de \mathcal{G} (défini dans [AIP, Prop.4.1.3]). On peut ainsi munir $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\log \text{dR}}^1(\bar{A}/\bar{X}^f(v))$ d'une structure de F -cristal surconvergent de Hodge ([BM10, Definition 3.20]) à pôles logarithmiques.

C.2 Cartes locales de la variété de Kuga-Sato

On va utiliser les notations de [FC90, IV.5.7, IV.6.7 et VI.1], ainsi que celles de 9.1. On doit comparer $\phi_P^* \mathcal{H}_{\log\text{cris}}^1(\bar{A}/\bar{X})$ avec le module de Dieudonné contravariant $\mathbb{D}_{G_P}^*$ sur Ξ_{P,Σ_P} . Soit $A_P \rightarrow Y_P^f$ la variété abélienne universelle sur la strate Y_P^f , soit $0 \rightarrow L_P^* \otimes \mathbf{G}_m \rightarrow G_P \rightarrow A_P \rightarrow 0$ l'extension de Raynaud sur \mathcal{B}_P^f et $\Xi_P^f \rightarrow \mathcal{B}_P^f$ le tore sous $U_P(\Gamma) \otimes \mathbf{G}_m$ sur lequel le pull-back de G_P (encore noté G_P) est muni d'une structure de 1-motif polarisé $L_P \rightarrow G_P$. Le schéma formel $\tilde{\Xi}_P^f = \Xi_P^f \times_{\mathcal{B}_P^f} G_P$ est muni d'une action de G_P et de L_P (par la structure de 1-motif de G_P au-dessus de Ξ_P), au-dessus du morphisme $\tilde{\Xi}_P^f \rightarrow \Xi_P^f$ donné par la première projection. Soit $\tilde{U}_P(\Gamma) = U_P(\Gamma) \ltimes L_P^*$; considérons le tore $F_P = \tilde{U}_P(\Gamma) \otimes \mathbf{G}_m$. On a une décomposition $F_P = E_P \times (L_P^* \otimes \mathbf{G}_m)$. On a donc une fibration (triviale) $F_P \rightarrow E_P$ en tores $L_P^* \otimes \mathbf{G}_m$. On voit que $\tilde{\Xi}_P^f$ est un F_P -torseur au-dessus de A_P via la composée

$$\tilde{\Xi}_P^f \rightarrow \Xi_P^f \times_{\mathcal{B}_P} A_P \rightarrow A_P.$$

Soit $\tilde{\Sigma}_P$ une décomposition en cônes polyédraux rationnels, admissible pour $\Gamma_{P,\ell} \ltimes L_P$, du cône $\tilde{C}_P \subset \tilde{U}_P(\Gamma)$. On la suppose compatible avec la décomposition Σ_P de C_P , admissible pour $\Gamma_{P,\ell}$ (pour les détails, voir [FC90, VI.1]). On forme l'immersion torique $F_P \subset \bar{F}_{P,\tilde{\Sigma}_P}$; elle est munie d'un morphisme $\bar{F}_{P,\tilde{\Sigma}_P} \rightarrow \bar{E}_{P,\Sigma_P}$ compatible avec les actions des tores F_P et E_P via $F_P \rightarrow E_P$. On définit $\tilde{\Xi}_{P,\tilde{\Sigma}_P}^f = \tilde{\Xi}_P^f \times^{F_P} \bar{F}_P$. Le morphisme $\tilde{\Xi}_{P,\tilde{\Sigma}_P}^f \rightarrow \mathcal{B}_P^f \times_{Y_P} A_P$ est un fibré en $\bar{F}_{P,\tilde{\Sigma}_P}$. Le schéma formel $\tilde{\Xi}_{P,\tilde{\Sigma}_P}^f$ est encore muni d'une action de G_P et d'une action de L_P via $L_P \rightarrow G_P$, au-dessus de Ξ_{P,Σ_P}^f .

On note $f: \tilde{\Xi}_{P,\tilde{\Sigma}_P}^f \rightarrow \Xi_{P,\Sigma_P}^f$ le morphisme canonique. Soit $\hat{\Xi}_{P,\Sigma_P}^f$ la complétion formelle de Ξ_{P,Σ_P}^f par rapport au diviseur Z_{P,Σ_P}^f (voir 9.1) et $\hat{\Xi}_{P,\tilde{\Sigma}_P}^f$ la complétion formelle par rapport au diviseur $f^* Z_{P,\Sigma_P}^f$. On omet désormais l'exposant f pour alléger les notations.

Par [FC90, VI.1.11], on sait qu'après complétion formelle le long de D_P , le pull-back de $\bar{A} \rightarrow \bar{X}$ par ϕ_P s'identifie au morphisme

$$\hat{\tilde{\Xi}}_{P,\tilde{\Sigma}_P}/L_P \rightarrow \hat{\Xi}_{P,\Sigma_P}$$

induit par f .

C.3 Dévissage du log-cristal de la variété de Kuga-Sato sur une carte locale

On a (après complétion formelle) :

$$\widehat{\phi_P^* \mathcal{H}_{\log\text{cris}}^1(\bar{A}/\bar{X})} = \mathcal{H}_{\log\text{cris}}^1 \left((\hat{\tilde{\Xi}}_{P,\tilde{\Sigma}_P}/L_P) / \hat{\Xi}_{P,\Sigma_P} \right).$$

PROPOSITION C.3.1. 1) Le morphisme de quotient de Mumford

$$\pi_P: \hat{\tilde{\Xi}}_{P,\tilde{\Sigma}_P} \rightarrow \hat{\Xi}_{P,\Sigma_P}/L_P$$

induit un morphisme de log-F-cristaux sur $\hat{\Xi}_{P,\Sigma_P}^f$:

$$\mathcal{H}_{\log\text{cris}}^1 \left((\hat{\tilde{\Xi}}_{P,\tilde{\Sigma}_P}/L_P) / \hat{\Xi}_{P,\Sigma_P} \right) \xrightarrow{\pi_P^*} \mathbb{D}_{\text{cris}}^*(G_P / \hat{\Xi}_{P,\Sigma_P})$$

où \mathbb{D}^* désigne le module de Dieudonné contravariant [Mes72]

2) Soit $U = \widehat{\Xi}_{P,\Sigma_P}^{\text{f,ord}} \cup \widehat{\Xi}_P^{\text{f}}$; c'est un ouvert formel de $\widehat{\Xi}_{P,\Sigma_P}^{\text{f}}$. La restriction de π_P^* à U s'insère dans une suite exacte courte

$$0 \rightarrow \text{Hom}(L_P, \mathcal{O}_{U,\text{cris}}) \rightarrow \mathcal{H}_{\log\text{cris}}^1 \left((\widetilde{\Xi}_{P,\widetilde{\Sigma}_P}/L_P)|_{U/U} \right) \xrightarrow{\pi_P^*} \mathbb{D}_{\text{cris}}^*(G_P/U) \rightarrow 0.$$

REMARQUE C.3.2. On notera que dans la suite exacte, seul le terme du milieu est à singularités logarithmiques.

Le schéma formel p -adique $\widehat{\Xi}_{P,\Sigma_P}$ donne par la construction de Berthelot [dJ95] un espace rigide $\widehat{\Xi}_{P,\Sigma_P}^{\text{rig}}$. Pour simplifier, on pose $S = \widehat{\Xi}_{P,\Sigma_P}^{\text{rig}}$ et S_{\log} le schéma logarithmique donné par S et son diviseur à l'infini. On pose aussi $\overline{A} = \widetilde{\Xi}_{P,\widetilde{\Sigma}_P}/L_P$, $G = \widehat{\Xi}_{P,\Sigma_P}^{\text{rig}} \times_{\mathcal{B}_P} G_P$, $G^\heartsuit = (\widehat{\Xi}_{P,\Sigma_P}^{\text{rig}} \times_{\mathcal{B}_P} G_P)/L_P$, et $\overline{G} = \widehat{\Xi}_{P,\widetilde{\Sigma}_P}^{\text{rig}}$. Rappelons qu'on a $G \subset \overline{G}$ et qu'on peut supposer $G^\heartsuit \subset \overline{A}$. On note π_P la flèche de quotient de Mumford $\overline{G} \rightarrow \overline{A}$.

LEMME C.3.3. On a une suite exacte de faisceaux localement libres sur S :

$$0 \rightarrow \text{Hom}(L_P, \mathcal{O}_S) \rightarrow \mathcal{H}_{\log\text{dR}}^1(\overline{A}/S_{\log}) \xrightarrow{\pi_P^*} \mathcal{H}_{\log\text{dR}}^1(\overline{G}/S) \rightarrow 0 \quad (*)$$

De plus la flèche de restriction $\rho: \mathcal{H}_{\log\text{dR}}^1(\overline{G}/S) \rightarrow \mathcal{H}_{\text{dR}}^1(G/S)$ induite par $G \subset \overline{G}$ est un isomorphisme.

REMARQUE C.3.4. 1) Soit \underline{L}_P le sous-faisceau du faisceau constant L_P , constructible sur S donné par les sous-groupes abéliens L_σ de L_P de rang $r' - r$ sur une strate $Z_{P,\sigma}$ où le rang torique de G^\heartsuit vaut $g - r'$ ($r \leq r' \leq g$). Notons encore π_P la flèche de quotient de Mumford $G \rightarrow G^\heartsuit$; On a aussi une suite exacte

$$0 \rightarrow \text{Hom}(\underline{X}_P, \mathcal{O}_S) \rightarrow \mathcal{H}_{\text{dR}}^1(G^\heartsuit/S) \xrightarrow{\pi_P^*} \mathcal{H}_{\text{dR}}^1(G/S) \rightarrow 0$$

[Pour montrer l'exactitude, il suffit de travailler fibre à fibre sur chaque strate où le rang de la partie torique de G^\heartsuit est constant.]

2) Concernant l'inclusion $G^\heartsuit \subset \overline{A}$, le morphisme $\overline{\rho}$ n'est pas un isomorphisme : le rang de $\mathcal{H}_{\log\text{dR}}^1(\overline{A}/S)$ est constant égal à $2g$ tandis que celui de $\mathcal{H}_{\text{dR}}^1(G^\heartsuit/S)$ diminue sur les strates non ouvertes (et vaut $g + r$ sur la strate fermée). Il s'agit d'un faisceau cohérent qui n'est pas localement libre.

Démonstration. On sait que $\mathcal{H}_{\log\text{dR}}^1(\overline{A}/S_{\log})$ est localement libre de rang $2g$ ([FC90, Chap.VI] et [LS]). Par ailleurs, $\mathcal{H}_{\log\text{dR}}^1(\overline{G}/S)$ est localement libre de rang fini. En effet, $\overline{G} \setminus G$ est un diviseur à croisements normaux relatif sur S . L'espace S est réunion stricte (infinie) d'affinoïdes; il suffit donc de vérifier l'assertion pour S affinoïde, et même supposer que S est un schéma $S = \text{Spec } B$ lisse de type fini sur \mathbf{Q} . On peut alors étendre les scalaires à \mathbf{C} et appliquer [Del70, Cor.3.14] qui montre que l'inclusion $G \subset \overline{G}$ au-dessus de S induit l'isomorphisme $\rho: \mathcal{H}_{\log\text{dR}}^1(\overline{G}/S) \cong \mathcal{H}_{\text{dR}}^1(G/S)$. Par le théorème de Grothendieck relatif [Gro66, Th.2], on voit que $\mathcal{H}_{\text{dR}}^1(G/S)$ est localement libre de rang fini. Comme G est extension de A_P par $L_P^* \otimes \mathbf{G}_m$, on trouve que le rang de $\mathcal{H}_{\text{dR}}^1(G/S)$ est $2r + g - r = g + r$. On déduit qu'il en va de même sur $S = \widehat{\Xi}_{P,\Sigma_P}^{\text{rig}}$.

Par [Mum70, Chap.II.5, Cor.2] (où l'hypothèse de propreté n'est pas nécessaire, lorsque la cohomologie relative est de rang fini constant), il suffit de vérifier l'exactitude de la suite (*) fibre à fibre.

Soit $x \in S$ et soit K le corps résiduel de x (on peut supposer que c'est un corps p -adique). On procède comme dans [CI99, 2.1] pour définir un morphisme

$$\mathrm{Ker}(\pi_P^*) \rightarrow \mathrm{Hom}(X_P, K)$$

Soit (U_i) un recouvrement de \bar{A} par des ouverts affines ; soit $U_{i,j} = U_i \cap U_j$. Un élément s de $\mathrm{Ker}(\pi_P^*)$ est une classe de cohomologie dans $\mathcal{H}_{\log \mathrm{dR}}^1(\bar{A}_{x_{\log}})$ (où x_{\log} est le point logarithmique obtenu comme composé de la log-structure de S avec $x: \mathcal{O}_S \rightarrow K$). On note ω^1 le faisceau des différentielles logarithmiques pour le morphisme $\bar{A}_{x_{\log}} \rightarrow x_{\log}$. La classe s est représentée par un élément $((\omega_i)_i, (f_{i,j})_{i,j}) \in \bigoplus_i f_* \omega_{U_i}^1 \oplus \bigoplus_{i,j} f_* \mathcal{O}_{U_{i,j}}$ fermé pour la différentielle totale, et tel qu'il existe des sections h_i (localement sur S) de $\bigoplus_i f_* \mathcal{O}_{U_i}$ telles que $\pi_P^* \omega_i = dh_i$ et $\pi_P^* = h_i - h_j$ sur $U_{i,j}$. Pour chaque $\gamma \in L_P$, on définit alors $g_i = \gamma^* h_i - h_i$ et on note que $dg_i = 0$ et $g_i - g_j = 0$ sur $U_{i,j}$. Les fonctions g_i fournissent donc localement une fonction sur S notée g_γ . La forme linéaire $\gamma \mapsto g_\gamma$ est l'image $\psi(s)$ de s cherchée. On voit que ψ est injective. Il en résulte, en comparant les dimensions, que π_P^* est surjective et que la suite est exacte. \square

de la proposition C.3.1. Soit $E(G)/S$ l'extension vectorielle universelle de G/S ; en notant encore G/S le groupe de Barsotti-Tate de G , et G^D son dual de Cartier, c'est une extension de G par ω_{G^D} [Mes72, Chap.IV, Cor.1.14]. On sait que le module de Dieudonné covariant de G/S est défini par $\mathbb{D}(G/S)^{\mathrm{rig}} = \mathrm{Lie}(E(G)/S)$ (par Mazur-Messing, Th.1 qui ne traite que le cas abélien, mais la démonstration est la même dans le cas de l'extension de Raynaud G). Par [Col98, Th.1.2.2] on a un isomorphisme canonique $\mathcal{H}_{\mathrm{dR}}^1(G/S) \cong \mathrm{Inv}(\Omega_{E(G)/S}^1)$. On a donc un isomorphisme canonique $\mathcal{H}_{\mathrm{dR}}^1(G/S) = \mathbb{D}^*(G/S)^{\mathrm{rig}}$.

Pour étudier l'intégralité de la flèche induite par π_P , on se restreint d'abord de $\widehat{\Xi}_{P,\Sigma_P}^f$ à $\widehat{\Xi}_P^f$; on observe, par la propriété d'universalité de l'extension vectorielle universelle que le morphisme $\pi_P: G \rightarrow A$ défini sur $\widehat{\Xi}_P^f$ induit une suite exacte de schémas en groupes sur $\widehat{\Xi}_P^f$:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \omega_{G^D} & \longrightarrow & E(G) & \longrightarrow & G \longrightarrow 0 \\ & & \pi_P \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \pi_P \\ 0 & \longrightarrow & \omega_{A^D} & \longrightarrow & E(A) & \longrightarrow & A \longrightarrow 0 \end{array}$$

ceci fournit un morphisme $\mathbb{D}(G) \rightarrow \mathbb{D}(A)$ injectif sur les modules de Dieudonné covariants. En effet, π_P induit un isomorphisme $\mathrm{Lie}(G) \cong \mathrm{Lie}(A)$, et on voit facilement par le lemme des cinq que la multiplication par p^n (pour tout $n \geq 1$) fournit une suite exacte courte

$$0 \rightarrow G[p^n] \rightarrow A[p^n] \rightarrow L_P/p^n L_P \rightarrow 0$$

ce qui fournit par dualité de Cartier la suite exacte courte $0 \rightarrow (L_P/p^n L_P)^D \rightarrow A[p^n]^D \rightarrow G[p^n]^D \rightarrow 0$ qui donne par passage aux différentielles l'injection

$$\omega_{G^D} \hookrightarrow \omega_{A^D}.$$

D'où, par [MM74, Th.1] un morphisme surjectif induit par π_P :

$$\mathcal{H}_{\mathrm{cris}}^1(A/\widehat{\Xi}_P^f) \xrightarrow{\pi_P^*} \mathbb{D}^*(G_P/\widehat{\Xi}_P^f) \rightarrow 0.$$

De plus par le lemme C.3.3, ce morphisme se prolonge à $\widehat{\Xi}_{P,\Sigma_P}^{\mathrm{rig}}$ (c'est à dire quand on inverse p). Pour voir qu'il se prolonge en fait à $\widehat{\Xi}_{P,\Sigma_P}^f$, c'est à dire qu'il préserve l'intégralité, il suffit de remarquer que l'injection induite par la restriction de $\widehat{\Xi}_{P,\Sigma_P}^f$ à $\widehat{\Xi}_P^f$:

$$\mathcal{O}_{\widehat{\Xi}_{P,\Sigma_P}^f} \hookrightarrow \mathcal{O}_{\widehat{\Xi}_P^f}$$

est de conoyau sans p -torsion, ce qui évident sur les cartes affines explicites pour chaque cône $\sigma \in \Sigma_P$, grâce au sous-lemme :

Sous-Lemme C.3.5. *Soit A une $W[[T]]$ -algèbre plate, régulière. Soit L un A -module libre de rang N . Soit L' un A -module de type fini contenu dans $L[p^{-1}]$. On suppose que $L'[p^{-1}] = L[p^{-1}]$ et $L'[T^{-1}] = L[T^{-1}]$. Alors, $L' \subset L$.*

Démonstration. Comme L est réflexif, on peut localiser en hauteur 1, et A devient principal. Si $f \in L'$, on sait qu'il existe $m_1, m_2 \geq 0$ tels que $p^{m_1}f \in L$ et $T^{m_2}f \in L$. Ceci entraîne $f \in L$. \square

REMARQUE C.3.6. Par contre, L' n'est pas nécessairement libre de sorte que l'inclusion peut être stricte. Exemple : $L' = (p, T) \subset W[[T]]$.

Pour montrer l'intégralité de la flèche ψ du lemme C.3.3, on utilise le relèvement de \bar{A} à W donné par la construction de Faltings-Chai et on calcule le $\mathcal{H}_{\log\text{cris}}^1(\bar{A}/\widehat{\Xi}_{P,\Sigma_P})$ comme la cohomologie log-de Rham entière. On obtient ainsi un diagramme

$$0 \rightarrow \text{Ker}(\pi_P^*) \rightarrow \mathcal{H}_{\log\text{cris}}^1\left((\widetilde{\Xi}_{P,\widetilde{\Sigma}_P}/L_P)/\widehat{\Xi}_{P,\Sigma_P}\right) \xrightarrow{\pi_P^*} \mathbb{D}_{\text{cris}}^*(G_P/\widehat{\Xi}_{P,\Sigma_P})$$

Avec $\psi: \text{Ker}(\pi_P^*) \hookrightarrow \text{Hom}(L_P, \mathcal{O}_{\widehat{\Xi}_{P,\Sigma_P}, \text{cris}})$.

Ces morphismes sont clairement des morphismes de log-cristaux (car ils sont compatibles aux connexions par construction). De plus, ces morphismes sont compatibles avec les Frobenius. Pour cela on rappelle que la formation du $\mathcal{H}_{\log\text{cris}}^1\left((\widetilde{\Xi}_{P,\widetilde{\Sigma}_P}/L_P)/\widehat{X}_{i_{P,\Sigma_P}}\right)$ commute au changement de base, on peut vérifier la compatibilité aux Frobenius en procédant fibre à fibre. Soit x un point fermé de $(\widehat{\Xi}_{P,\Sigma_P}^f)_{\text{red}}$, $K(x)$ son corps résiduel le morphisme π_P^* se factorise comme suit

$$\text{H}_{\log\text{cris}}^1(\bar{A}_x/W(K(x))_{\log}) \rightarrow \text{H}_{\text{rig}}^1(G_{P,x}^{\heartsuit}) \rightarrow \text{H}_{\text{rig}}^1(G_{P,x}) \rightarrow \mathbb{D}^*(G_{P,x})$$

On reprend alors l'argument de [CI99, 2.(ii)], la première flèche est construite comme dans [Chi99] ; elle est Frobenius équivariante par construction. La seconde est induite par π_P , et est donc compatible au Frobenius par functorialité. La compatibilité avec Frobenius du dernier isomorphisme se montre séparément pour la partie abélienne (qui résulte des théorèmes de comparaison pour les variétés abéliennes entre cohomologie rigide et cristalline d'une part et cohomologie cristalline et module de Dieudonné d'autre part), et pour la partie torique, on se ramène à \mathbf{G}_m et la vérification est immédiate.

Reste à vérifier que ces données fournissent la suite exacte désirée quand on se restreint à l'ouvert U et en fait uniquement à l'ouvert ordinaire. En chaque point x de $\widehat{\Xi}_{P,\Sigma_P}^{\text{f,ord}}$, la fibre de $\mathcal{H}_{\log\text{cris}}^1\left((\widetilde{\Xi}_{P,\widetilde{\Sigma}_P}/L_P)/\widehat{\Xi}_{P,\Sigma_P}\right)$ s'identifie au $\text{H}_{\log\text{cris}}^1$ de la fibre. Comme l'image et le noyau de $\pi_{P,x}^*$ sont ordinaires comme F -cristaux. On en déduit que le $\text{H}_{\log\text{cris}}^1$ de la fibre est ordinaire, et par un calcul facile, on voit que son espace de pente 0 est de dimension g et se surjecte sur la partie de pente 0 de $\mathbb{D}^*(G_{P,x})$. Il en résulte que π_P^* est surjective et de noyau $\text{Hom}(L_P, K(x))$. Par Nakayama, on en déduit l'énoncé 2) de la proposition. \square

RÉFÉRENCES

AG07 F. Andreatta and C. Gasbarri. The canonical subgroup for families of abelian varieties. *Compos. Math.*, 143 :566–602, 2007.

- AGV72 M. Artin, A. Grothendieck, and J.-L. Verdier. *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas (SGA 4), tome 2*, volume 270. Springer-Verlag, 1972.
- AIP F. Andreatta, A. Iovita, and V. Pilloni. Families of Siegel modular forms. à paraître aux Annals of Mathematics.
- AM04 A. Abbès and A. Mokrane. Sous-groupes canoniques et cycles évanescents p -adiques. *Publ. Math. de l'IHES*, 99 :117–162, 2004.
- BM10 O. Brinon and A. Mokrane. Surconvergence de la monodromie p -adique. Prépublication disponible à <http://www.math.u-bordeaux1.fr/~obrinon/publications/Surconvergence.pdf>, 2010.
- BO78 P. Berthelot and A. Ogus. *Notes on crystalline cohomology*, volume 21 of *Mathematical notes*. Princeton University press, 1978.
- Bri08 O. Brinon. *Représentations p -adiques cristallines et de de Rham dans le cas relatif*, volume 112 of *Mémoires de la SMF*. Société Mathématique de France, 2008.
- BS66 Z.I Borevich and I.R. Shafarevich. *Number Theory*, volume 20 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press, 1966.
- Buz07 K. Buzzard. Eigenvarieties. In *L -functions and Galois representations, Proc. Conf. Durham 2004*, volume 320 of *London Math. Soc. Lecture Notes Series*, pages 59–120. Cambridge, 2007.
- Che04 G. Chenevier. Familles p -adiques de formes automorphes pour $GL(n)$. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 570 :143–217, 2004.
- Chi99 Chiarellotto. Rigid cohomology and invariant cycles for a semistable log scheme. *Duke Math. J.*, 97 :155–169, 1999.
- CI99 R. Coleman and A. Iovita. The Frobenius and monodromy operators for curves and abelian varieties. *Duke Math. J.*, 97 :171–215, 1999.
- Col98 R. Coleman. Duality for the de Rham cohomology of an abelian scheme. *Ann. Inst. Fourier*, 48(no 5) :1379–1393, 1998.
- Del70 P. Deligne. *Equations différentielles à point singuliers réguliers*, volume 163 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, 1970.
- dJ95 J. de Jong. Crystalline Dieudonné theory via formal and rigid geometry. *Publ. Math. de l'IHÉS*, 82 :5–96, 1995.
- FC90 G. Faltings and C.-L. Chai. *Degeneration on abelian varieties*, volume 22 of *Ergebnisse der Mathematik*. Springer-Verlag, 1990.
- FT10 L. Fargues and Y. Tian. La filtration canonique des points de torsion des groupes p -divisibles (avec la collaboration de Yichao Tian). *Annales scientifiques de l'ENS, série 4*, 44 :905–961, 2010.
- Gro66 A. Grothendieck. On the de Rham cohomology of algebraic varieties. *Publ. Math. IHÉS*, 29 :95–103, 1966.
- Haz78 M. Hazewinkel. *Formal Groups and Applications*, volume 78 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press, 1978.
- Hid02 H. Hida. Control theorems of coherent sheaves on Shimura varieties of PEL type. *J. Inst. Math. Jussieu*, 1 :1–76, 2002.
- Kat73 N. Katz. Travaux de Dwork. In *Séminaire Bourbaki 1971/72, exposé 409*, volume 317 of *Lecture Notes in Math.*, pages 167–200. Springer Verlag, 1973.
- LS K. W. Lan and J. Suh. Vanishing theorems for torsion automorphic sheaves on general PEL-type Shimura varieties. à paraître.
- Mes72 W. Messing. *The crystals associated to Barsotti-Tate groups : with applications to abelian schemes*, volume 264 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, 1972.
- MM74 B. Mazur and W. Messing. *Universal extensions and one dimensional crystalline cohomology*, volume 370 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, 1974.

- Mum70 D. Mumford. *Abelian Varieties*. Oxford University Press, 1970.
- OT70 F. Oort and J. Tate. Group schemes of prime order. *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.* 4^e série, 3 :1–21, 1970.
- Pil12 V. Pilloni. Sur la théorie de Hida pour le groupe GSp_{2g} . *Bulletin de la SMF*, pages 335–400, 2012.
- Poi08 J. Poineau. Un résultat de connexité pour les variétés analytiques p -adiques. Privilège et noethérianité. *Composito Mathematica*, 144 :107–133, 2008.
- PS V. Pilloni and B. Stroh. Surconvergence et classicité : le cas déployé. preprint.
- Ray94 M. Raynaud. Revêtements de la droite affine en caractéristique $p > 0$ et conjecture d’Abhyankar. *Invent. Math.*, 116 :425–462, 1994.
- Sch12 P. Scholze. Perfectoid spaces. *Publications Mathématiques de l’IHES*, 116 :245–313, 2012.
- Sch13a P. Scholze. On torsion in the cohomology of locally symmetric varieties. Preprint disponible à <http://www.math.uni-bonn.de/people/scholze/Torsion.pdf>, 2013.
- Sch13b P. Scholze. p -adic Hodge theory for rigid-analytic varieties. *Forum of Mathematics, Pi*, 1 :77, 1 2013.
- Str10 B. Stroh. Compactification minimale et mauvaise réduction. *Ann. Inst. Fourier*, 60 :1035–1055, 2010.
- Tat67 J. Tate. p -divisible groups. In *Proceedings of a conference on local fields*, pages 158–183. Springer Verlag, 1967.
- Til12 J. Tilouine. Formes compagnons et complexe BGG dual pour $\mathrm{GSp}(4)$. *Ann. Inst. Fourier*, 62 :fasc.3–4, 2012.
- Tsu10 T. Tsuji. Purity for Hodge-Tate representations. *Math. Annalen*, 350 :829–866, 2010.
- Urb11 E. Urban. Eigenvarieties for reductive groups. *Ann. of Math.*, 174 :1685–1784, 2011.

Olivier Brinon olivier.brinon@math.u-bordeaux1.fr

IMB, CNRS UMR 5251, Université Bordeaux 1, 33405 Talence, France

Abdellah Mokrane mokrane@math.univ-paris13.fr

LAGA, CNRS UMR 7539, Université Paris 8, 93200 Saint-Denis, France

Jacques Tilouine tilouine@math.univ-paris13.fr

LAGA, CNRS UMR 7539, Institut Galilée, Université Paris 13, 93430 Villetaneuse France